
UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 00183272 4

LES PRINCIPES

DES MATHÉMATIQUES

LES PRINCIPES
DES MATHÉMATIQUES

DU MÊME AUTEUR :

De Platonicis mythis, thèse latine (épuisé).

De l'Infini mathématique. 1 vol. gr. in-8 (Alcan, 1896).

La Logique de Leibniz, *d'après des documents inédits.* 1 vol. gr. in-8 (Alcan, 1901).

Opuscules et Fragments inédits de Leibniz. 1 vol. in-4 (Alcan, 1903).

L'Algèbre de la Logique. 1 vol. in-12 (collection *Scientia*, Gauthier-Villars, 1905).

Traité de Logistique, sous presse (Alcan).

Histoire de la Logistique, en préparation (Alcan).

En collaboration avec M. LEAU :

Histoire de la Langue universelle. 1 vol. in-8 (Hachette, 1903).

1080-05 -- Coulommiers. Imp. Paul BRODARD. — 12-05.

LES PRINCIPES

DES MATHÉMATIQUES

AVEC UN APPENDICE

SUR

LA PHILOSOPHIE DES MATHÉMATIQUES DE KANT

PAR

Louis COUTURAT

PARIS
FÉLIX ALCAN, ÉDITEUR
ANCIENNE LIBRAIRIE GERMER BAILLIÈRE ET Cie
108, BOULEVARD SAINT-GERMAIN, 108

1905



AVANT-PROPOS

Le présent livre n'a aucune prétention à l'originalité, et c'est précisément ce qui doit le recommander au lecteur. Il doit l'existence à l'apparition du magistral ouvrage de M. Bertrand RUSSELL qui porte le même titre[1]. En principe, il n'était qu'un compte rendu de cet ouvrage[2]; mais, pour commenter et illustrer les théories philosophiques de notre auteur, nous avons été peu à peu amené à faire rentrer dans notre exposé l'analyse de la plupart des travaux des mathématiciens contemporains sur les mêmes questions. De cette sorte d'enquête sur l'état présent de la philosophie des mathématiques est résultée pour nous la conviction (que nous espérons faire partager au lecteur) que la doctrine de M. Russell n'est nullement, comme certains systèmes philosophiques à la mode, un brillant paradoxe, une fantaisie individuelle et éphémère, sans racines dans le passé et sans fruits dans l'avenir, mais l'aboutissement nécessaire et le couronnement de toutes les recherches critiques auxquelles les mathématiciens se sont livrés depuis un demi-siècle. C'est un fait notoire que les mathématiques modernes ont constamment tendu à la rigueur déductive des raisonnements et à la pureté logique des concepts. A ces besoins nouveaux de l'esprit scientifique devait nécessairement répondre une

1. *The Principles of Mathematics*, t. I (Cambridge, University Press, 1903).
2. Voir la *Revue de Métaphysique et de Morale*, janvier-mars-juillet-novembre 1904, mars 1905.

Logique de plus en plus exacte et raffinée; l'instrument indispensable de cette nouvelle Logique est la « logique symbolique » inventée par M. PEANO, pratiquée par toute une école de mathématiciens et perfectionnée par M. Russell. C'est grâce à cette *Logistique* (comme nous l'appellerons désormais) qu'on a pu soumettre toutes les théories mathématiques à une analyse précise et subtile, et les reconstruire logiquement avec un petit nombre de données fondamentales (principes et notions premières). C'est grâce à elle que M. Russell a pu, en complétant sur certains points ce travail de réduction logique, systématiser tous les résultats acquis en une vaste et profonde synthèse, qui est la quintessence des travaux antérieurs, et qui manifeste l'esprit même de la mathématique moderne.

Cet esprit se trouve être diamétralement opposé (d'autres philosophes l'ont remarqué comme nous) à la philosophie des mathématiques de Kant, qui a encore beaucoup de crédit dans les écoles. C'est pourquoi nous avons saisi l'occasion qui se présentait à nous de confronter cette philosophie avec celle qui se dégage implicitement de la mathématique contemporaine [1]. Comme le contraste même est propre à mieux faire comprendre celle-ci, et à faire apprécier l'originalité de la doctrine dont nous nous faisons l'interprète, nous avons cru devoir joindre cette étude historique en Appendice à cet ouvrage. On a reproché à cette étude de n'être pas assez historique, de ne pas se replacer suffisamment au point de vue et au temps de Kant. Assurément, nous n'avons pas cru devoir en éliminer toute préoccupation critique ou dogmatique. Mais, alors que tant d'historiens ont profité du centenaire de la mort de Kant pour comparer sa doctrine aux idées du temps présent, et ont cru pouvoir la louer de s'accorder avec elles, en vanter la vitalité et la modernité, nous avions bien le droit d'instituer, en un autre domaine, une comparaison semblable et d'en tirer, dans ce domaine, des conclusions moins favorables au kan-

1. Dans le numéro que la *Revue de Métaphysique et de Morale* a consacré au centenaire de la mort de Kant (mai 1904). Cf. *Bulletin de la Société française de Philosophie*, numéro de mai 1904.

tisme. Exiger qu'on juge toujours un philosophe « de l'intérieur », à son point de vue et à celui de son temps, c'est admettre qu'il n'y a pas de vérité en philosophie, qu'un système philosophique est une œuvre d'art qui ne vaut que par son unité intrinsèque et son harmonie [1]. En philosophie comme ailleurs, le respect superstitieux du fait historique aboutit au dilettantisme et au scepticisme.

Comme de juste, nous manifestons la même indépendance à l'égard de nos opinions anciennes. Nous devons prévenir ceux de nos lecteurs qui connaîtraient notre ouvrage *De l'Infini mathématique* que nous renions désormais quelques-unes des thèses que nous y avons soutenues. Pour préciser, nous en maintenons toute la partie didactique et critique; c'est la partie positive, notamment la théorie du nombre et celle de la grandeur, que nous remplacerions par les chapitres II et III du présent livre. Les critiques sont avertis par là de ne pas nous opposer des contradictions manifestes entre nos thèses d'aujourd'hui et celles d'autrefois. S'il nous fallait une excuse pour avoir varié, c'est-à-dire, croyons-nous, pour avoir progressé, elle se trouverait dans ce fait, que presque tous les travaux dont nous nous inspirons ici ont paru dans les dix années qui se sont écoulées depuis la composition de notre premier ouvrage.

Cette considération ne nous laisse non plus aucune illusion sur le caractère définitif de notre travail. Lors même qu'il serait au courant aujourd'hui, il ne le serait plus demain. Tous les ans, on pourrait presque dire : tous les mois, il paraît de nouveaux mémoires sur les principes de telle ou telle branche des mathématiques, qui parachèvent sur quelque point la reconstruction logique des sciences exactes. Le nombre et la variété des travaux de ce genre qui paraissent en Italie et en

1. D'ailleurs, même à ce point de vue, le système de Kant reste encore sujet à critique. Son savant commentateur n'a-t-il pas déclaré que « la *Critique de la raison pure* est l'œuvre la plus géniale et la plus pleine de contradictions de toute l'histoire de la philosophie » ? (VAIHINGER, *Commentar zu Kants Kritik der reinen Vernunft*, t. II, Préface; 1892). Nous avons eu l'occasion (et l'audace) de remarquer quelques-unes de ces contradictions.

Angleterre, en Allemagne et en Amérique prouvent au spectateur le plus superficiel les progrès incessants que font la Logistique et la Logique des mathématiques. Nous avons le regret de constater que la France n'y a pris jusqu'ici aucune part; nous nous croirions amplement payé de nos peines, si notre ouvrage pouvait contribuer à faire connaître dans notre pays cet imposant ensemble de travaux, à répandre les doctrines auxquelles ils ont donné naissance, enfin et surtout, à susciter parmi nos compatriotes des chercheurs capables de rivaliser avec les logisticiens étrangers, de collaborer à leur œuvre et de la continuer.

LES PRINCIPES DES MATHÉMATIQUES

INTRODUCTION

Jusqu'au milieu du XIX[e] siècle, la Logique et les Mathématiques avaient vécu absolument distinctes et même séparées. La Logique était restée confinée dans le domaine étroit que lui avait assigné Aristote, à savoir dans l'étude des relations d'inclusion ou de prédication entre les concepts généraux et abstraits; et, malgré les tentatives de Jungius, de Leibniz et de leurs disciples, qui avaient avorté ou restaient ignorées, rien ne pouvait faire prévoir une renaissance ou un nouveau développement de la Logique. De leur côté, *les Mathématiques* (ce pluriel est significatif) formaient une collection de sciences spéciales d'un caractère technique : science du nombre, science de la grandeur, science de l'espace, science du mouvement, dont l'unité, assez vague, consistait uniquement dans la communauté de méthode. Mais, chose curieuse, cette méthode déductive était absolument inconnue de la Logique formelle, qui pourtant prétendait étudier toutes les formes de la déduction, de sorte qu'il s'était constitué implicitement une Logique mathématique tout à fait différente de la Logique classique (syllogistique); et les philosophes, pour expliquer cette dualité, se contentaient d'opposer entre elles la Logique de la qualité et la Logique de la quantité, sans chercher le lien qui devait

les unir, en tant que branches d'une seule et même Logique.

Cet état de choses a complètement changé pendant la seconde moitié du XIX[e] siècle. D'une part, les mathématiciens furent pris de scrupules logiques inconnus de leurs prédécesseurs; ils se mirent à analyser leurs méthodes de démonstration, à vérifier l'enchaînement de leurs théorèmes, à rechercher les hypothèses ou postulats qui se glissaient subrepticement dans leurs raisonnements, enfin à dégager les principes ou axiomes d'où partaient leurs déductions et d'où dépendaient toutes leurs théories. Le Calcul infinitésimal, dont les principes avaient gardé quelque chose de paradoxal et de mystérieux, fut enfin fondé sur la théorie rigoureuse des limites; la théorie des fonctions, où avaient longtemps régné des préjugés d'origine intuitive, fut épurée et approfondie. La Géométrie et la Mécanique, dégagées autant que possible de l'intuition, devinrent des « systèmes hypothético-déductifs » fondés sur un certain nombre d'axiomes ou de postulats d'où tout le reste se déduit logiquement. Enfin, en creusant pour ainsi dire les fondations de leur science, et en reprenant tout l'édifice en sous-œuvre, les mathématiciens furent amenés à constituer deux théories nouvelles qui devaient désormais servir de base à toutes les autres : la théorie des ensembles et la théorie des groupes; autrement dit, la science des multiplicités et la science de l'ordre. Ainsi il apparaissait que les sciences du nombre et de la grandeur n'étaient pas primordiales, mais reposaient sur des doctrines d'un caractère plutôt logique que mathématique, et sur des notions qui n'avaient plus rien de *quantitatif*.

D'autre part, la Logique, grâce à des mathématiciens, sortait vers le même temps de sa torpeur séculaire : tout d'abord, elle s'apercevait qu'elle n'avait même pas exploré et défriché tout le champ où Aristote l'avait enfermée; et dans le domaine circonscrit des relations d'inclusion entre concepts, elle découvrait bien d'autres formes de déduction que les trop fameux modes du syllogisme (dont quatre se trouvaient d'ailleurs faux). Empruntant à l'Algèbre, non pas ses principes, mais sa méthode et son symbolisme, la Logique *formelle* se constituait pour la

première fois sous la double forme d'un Calcul des classes et d'un Calcul des propositions qui offrent entre eux une surprenante analogie. Puis elle remarquait que l'esprit humain, soit dans la vie quotidienne, soit dans les sciences, considère et manie bien d'autres relations que les relations d'inclusion entre concepts : et elle entreprenait de classer et d'analyser toutes ces relations en étudiant les propriétés *formelles* qui les rendent susceptibles de déduction. Élargissant ainsi indéfiniment son horizon auparavant si borné, elle devenait la Logique des relations. Et comme les relations les plus simples et les plus élémentaires se trouvent dans les théories mathématiques, elle s'appliquait à analyser et à vérifier l'enchaînement des propositions mathématiques, et même à démontrer les prétendus axiomes en les ramenant à des principes purement logiques. Dès lors, le pont était jeté entre les deux domaines, autrefois séparés, de la Logique et de la Mathématique. Le Calcul des classes apparaît comme la partie la plus élémentaire de la théorie des ensembles; et la Logique des relations est le fondement indispensable de la théorie des groupes et de la théorie des fonctions. Ainsi s'est consommée de nos jours l'union, pour ne pas dire la fusion de la Logique et de la Mathématique; on ne peut plus discerner où finit la Logique, où commence la Mathématique, et on ne peut plus distinguer ces deux disciplines qu'en disant, avec M. Russell[1], que la Logique constitue la partie générale et élémentaire de la Mathématique, et que la Mathématique consiste dans l'application des principes de la Logique à des relations spéciales [2].

Bien entendu, il ne s'agit dans tout ceci que de la Mathématique pure, conçue, suivant l'expression de M. Pieri, comme un « système hypothético-déductif », c'est-à-dire comme un ensemble de propositions dont la vérité est subordonnée à certaines hypothèses dont elles se déduisent *logiquement*. On sait que tout théorème mathématique est soumis à des hypothèses ou condi-

1. *Op. cit.*, p. 9.
2. Les rapports de la Logique et de la Mathématique seront précisés dans notre *Conclusion*.

tions explicites ou implicites : *si* ces hypothèses sont vraies (dans tel cas particulier), le théorème est vrai (dans le même cas). Cela montre bien le caractère *logique* des vérités mathématiques, et l'espèce de valeur qu'elles possèdent, et qu'on peut appeler : une *nécessité hypothétique*. On comprend dès lors la définition par laquelle débute l'ouvrage de M. Russell : « La Mathématique pure est l'ensemble des propositions de la forme : « p implique q », p et q étant des propositions qui contiennent les mêmes variables et qui ne contiennent que des constantes logiques »[1]. En d'autres termes, la Mathématique pure est un ensemble d'*implications formelles* indépendantes de tout contenu. Et cela justifie cette assertion paradoxale et humoristique, émise ailleurs par le même auteur : « La Mathématique est une science où l'on ne sait jamais de quoi l'on parle, ni si ce qu'on dit est vrai[2] ». En effet, on ne sait pas de quoi l'on parle, puisque la matière des implications est indéterminée ; et l'on ne sait pas si ce qu'on dit est vrai, puisque la vérité des conséquences dépend de la vérité des hypothèses, laquelle dépend à son tour du contenu qu'on leur donne[3]. Les Mathématiques *appliquées* consistent précisément à appliquer ces implications formelles à des données matérielles; dès lors, les thèses des théorèmes deviennent vraies dans les cas et dans la mesure où leurs hypothèses sont vérifiées par ces données; mais les théorèmes eux-mêmes sont toujours vrais, en tant qu'implications formelles, qui, comme on le verra, ne supposent ni la vérité de leurs hypothèses ni celle de leurs thèses. Les Mathématiques appliquées comprennent la Géométrie et la Mécanique, en tant qu'elles portent sur l'espace et le monde réels (ou plutôt *actuels*,

1. Ces expressions de constantes et de variables seront expliquées dans la suite.

2. *Recent work on the principles of Mathematics*, ap. *The International Monthly*, vol. IV, n° 1, p. 84. Burlington, juillet 1901.

3. Il ne faut pas en conclure, comme les sceptiques contemporains se sont empressés de le faire, qu'il n'y a pas de *vérité* en Mathématique, car, quelle que soit la vérité des hypothèses et des conséquences, les implications dont elles font partie restent vraies, et sont par suite absolument vraies. Le sens commun a donc raison de considérer les propositions mathématiques (entendues en ce sens) comme le type de la vérité universelle et nécessaire.

comme on dit en anglais), mais non en tant qu'elles spéculent sur un espace idéal et un monde possible. De même, elles comprennent l'Arithmétique des nombres « concrets », c'est-à-dire toutes les applications des nombres au dénombrement d'objets réels ou à la mesure de grandeurs réelles. Telle est la distinction nette et logique des mathématiques pures et des mathématiques appliquées, qu'on a contestée récemment à tort, nous semble-t-il [1].

Cette fusion progressive de la Logique et de la Mathématique pure, qui a été implicitement et presque inconsciemment réalisée par les travaux de Boole, de Schröder et de Peirce, d'une part, de Weierstrass, de Georg Cantor et de Peano, d'autre part, constitue évidemment une révolution dans la philosophie des mathématiques, et par suite dans la théorie de la connaissance. Elle était mûre pour un exposé systématique qui fût la synthèse de tous ces travaux épars. Cette synthèse, que nous attendions impatiemment depuis quelques années, elle existe aujourd'hui. L'ouvrage de M. Russell résume et coordonne les résultats des recherches critiques des mathématiciens modernes, et les théories nouvelles qui sont nées de ces recherches. C'est une reconstruction logique de toute la Mathématique pure au moyen de la « Logistique » de M. Peano, complétée et perfectionnée par l'auteur dans le domaine encore neuf de la Logique des relations [2]. Cet ouvrage est en somme destiné à justifier la thèse de l'identité fondamentale de la Logique et de la Mathématique, en montrant que toutes les propositions de celle-ci reposent sur *neuf* notions indéfinissables et sur *vingt* principes indémontrables, qui sont les notions premières et les principes de la Logique même.

A vrai dire, la démonstration *formelle* de cette thèse (au moyen de la Logique symbolique, seul procédé de raisonnement rigoureux et sûr) se trouvera dans le second volume, que M. Russell

1. L. Weber, *Vers le positivisme absolu par l'idéalisme*, p. 242 sqq. Paris, Alcan, 1903.

2. Voir Russell, *Sur la Logique des relations, avec des applications à la théorie des séries*, ap. *Revue de Mathématiques* de G. Peano, t. VII, p. 115-147. Turin, 1902.

prépare avec la collaboration de M. Whitehead, l'auteur d'un beau *Traité d'Algèbre universelle*[1]. Mais elle se trouve déjà implicitement dans les travaux de M. Peano et de son école, et notamment dans le *Formulaire de Mathématiques* qui en est le principal fruit.

C'est cette démonstration que nous voulons exposer sommairement, sous une forme sans doute moins rigoureuse, mais aussi moins technique et plus accessible aux philosophes non initiés à la Logistique. Mais auparavant il importe d'énumérer les principes et les notions premières de la Logique, puisque ce sont les principes et les notions premières de toute la Mathématique, et qu'en tout cas il faut, pour pouvoir juger cette thèse, connaître la méthode par laquelle elle paraît pouvoir se justifier. Au surplus, nous avons dit que la Logique classique était radicalement insuffisante à rendre compte des raisonnements mathématiques ; il est donc intéressant et même nécessaire de donner un aperçu succinct de la Logique moderne, qui, tout en englobant la Logique classique, est infiniment plus vaste et plus compréhensive, et qui est la vraie logique des mathématiques.

1. *A treatise on Universal Algebra*, t. I (Cambridge, 1898). Cf. notre article sur *L'Algèbre universelle de M. Whitehead*, ap. *Revue de Métaphysique et de Morale*, t. VIII, p. 323-362 (mai 1900).

CHAPITRE I

PRINCIPES DE LA LOGIQUE[1]

Comme toute théorie déductive, la Logique formelle repose sur un certain nombre de notions premières (qu'on ne définit pas) et de propositions premières (admises sans démonstration). L'idéal serait évidemment de réduire les principes et les notions premières au plus petit nombre possible; et c'est à quoi M. Russell s'est efforcé dans son ouvrage. Seulement, il a été ainsi conduit, pour ramener les formules et les déductions au maximum de simplicité formelle, à énoncer ses principes sous une forme qui paraît parfois artificielle et paradoxale, et qui n'offre pas toujours l'évidence que semblerait exiger le sens commun. Il faut sans doute renoncer à cette évidence, qui non seulement n'est pas une condition de rigueur logique, mais qui l'exclut plutôt. Combien de théorèmes d'Arithmétique et de Géométrie sont plus « évidents » que les axiomes sur lesquels on les fonde! Jamais les Mathématiques ne se seraient constituées comme sciences déductives, si l'on avait accepté toutes les propositions reconnues évidentes, et s'il ne s'était trouvé des esprits pointilleux pour démontrer des vérités de bon sens, comme « 2 et 2 font 4 ». Quand on cherche, suivant le précepte de Leibniz, à « démontrer les axiomes », il est iné-

1. Cf. notre article sur *La Logique mathématique de M. Peano*, ap. *Revue de Métaphysique*, t. VII, p. 616-646 (septembre 1899). Nous devons dire, toutefois, que nous ne souscririons plus à toutes les conclusions critiques de cet article.

vitable qu'on aboutisse à déduire des propositions évidentes de propositions qui le sont moins, et qu'on paraisse, par suite, justifier le clair par l'obscur, le certain par le douteux. Mais l'essentiel est de déduire logiquement l'ensemble des vérités admises du plus petit nombre possible de principes; il faut donc faire bon marché de l'évidence, condition toute subjective, donc variable, et psychologique, donc étrangère à la Logique; d'ailleurs, les principes participent de l'évidence que le sens commun attribue à leurs conséquences.

Néanmoins, pour ne pas rebuter ou scandaliser le lecteur, nous nous écarterons çà et là de l'énoncé des principes de M. Russell[1]. On sait du reste qu'il est toujours possible de remplacer par d'autres les principes d'une théorie déductive : il suffit souvent, pour cela, de changer le choix ou l'ordre des notions premières[2]. Des ensembles tout différents de principes peuvent donc engendrer le même système de conséquences. Dès lors l'essentiel, dans une théorie logique, est moins l'ensemble *variable* des principes que l'ensemble *permanent* des conséquences. Qu'il suffise au lecteur de savoir que les principes que nous substituerons, pour plus de clarté, à certains principes de M. Russell se déduisent formellement de ceux-ci, de sorte que, s'ils ne sont pas *nécessaires*, ils sont en tout cas *suffisants* pour fonder la Logique, et par suite la Mathématique pure[3].

§ A. — Calcul des Propositions[4].

La partie fondamentale de la Logique est le Calcul des propositions. En effet, si l'on voulait commencer par une autre

1. *Op. cit.*, ch. II : *Symbolic Logic.*
2. Cf. G. Peano, *Les définitions mathématiques*, ap. *Bibliothèque du Congrès de Philosophie*, t. III, p. 280; A. Padoa, *Introduction logique à une théorie déductive quelconque*, *ibid.*, p. 315.
3. Pour un exposé plus détaillé des principes de la Logique, nous renverrons le lecteur à notre *Traité de Logistique*, dont le présent chapitre est le résumé.
4. Russell, *op. cit.*, §§ 14-19; notamment § 18, énumération des dix axiomes du Calcul des propositions.

théorie quelconque, on ne pourrait rien déduire des principes de cette théorie tant qu'on n'aurait pas admis les principes du Calcul des propositions, qui sont le nerf de tout raisonnement. La relation principale de ce calcul est la relation d'*implication* entre deux propositions : c'en est la première notion indéfinissable. On désignera les propositions par les lettres p, q, r,... et l'on écrira « p implique q » sous la forme suivante :

$$p \supset q$$

Cette formule signifie que « si p est vraie, q est vraie »; ou que « si q est fausse, p est fausse »; ou que « p ne peut être vraie et q fausse »; ou que « ou bien p est fausse, ou bien q est vraie »[1]. Toutes ces assertions équivalentes (mais dérivées) ne peuvent servir qu'à *expliquer* l'implication $p \supset q$, mais non à la *définir*.

M. Russell définit les *propositions* comme suit : « Une proposition est ce qui s'implique soi-même. » Autrement dit, il prend pour définition de la notion de proposition le *principe d'identité*. Pour dire que p, q,... sont des propositions, il écrit : $p \supset p$, $q \supset q$, etc. On voit déjà ici la différence entre les définitions mathématiques et les définitions philosophiques. Au point de vue philosophique, la notion d'*implication* paraît supposer celle de *proposition*, précisément parce que seules les propositions peuvent impliquer ou être impliquées[2].

Vient ensuite la définition du *produit logique* de deux propositions. Nous l'omettons, à cause de son obscurité et de sa complication; nous préférons admettre cette notion comme indéfinissable, et l'expliquer verbalement. Le *produit logique* de deux (ou plusieurs) propositions p, q,... est l'*affirmation simultanée* de ces propositions : il consiste à dire que p, q,...

1. La dernière de ces interprétations verbales est préférable, parce qu'elle est la moins équivoque.

2. M. Russell est ainsi amené à formuler deux autres principes qui nous semblent philosophiquement inutiles ou insignifiants :

$$p \supset q . \supset . p \supset p$$
$$p \supset q . \supset . q \supset q$$

c'est-à-dire : « Si p implique q, p est une proposition, et q est une proposition. »

sont toutes vraies à la fois. Il s'écrit $p \frown q$, ou bien simplement pq, comme un produit arithmétique.

L'équivalence de deux propositions peut maintenant se définir comme suit[1] :

$$p = q . = . p \supset q . q \supset p$$

« Dire que p égale q, c'est dire que p implique q et que q implique p[2]. »

Nous pouvons maintenant énumérer les cinq principes suivants en donnant leur formule symbolique (dans ce qui suit, nous supposerons une fois pour toutes, pour simplifier les formules, que p, q, r sont des propositions) :

1° La *loi commutative* :

$$p \frown q = q \frown p$$

2° la *loi associative* :

$$p \frown (q \frown r) = (p \frown q) \frown r$$

3° le *principe de simplification* :

$$p \frown q \supset p$$

« L'affirmation simultanée de p et de q implique l'affirmation de p. »

4° le *principe de composition* :

$$p \supset q . p \supset r . \supset . p \supset q \frown r$$

1. Les points, dans les formules suivantes, remplacent (avec avantage) des parenthèses. Ils servent à séparer les diverses parties d'une formule. On doit d'abord unir les parties séparées par un seul point, puis celles séparées par deux points, et ainsi de suite. Il en résulte que la copule principale (celle qui constitue la proposition totale) est celle qui est encadrée du plus grand nombre de points. On économise des points au moyen de certaines conventions; par exemple, en admettant que $pq \supset r$ signifie $(pq) \supset r$, on pourra écrire $p . q . \supset . r$ au lieu de $p . q : \supset . r$.

2. Il ne faut pas croire que cette formule constitue un cercle vicieux, parce qu'on y emploie comme copule principale le signe à définir $=$. Ce signe n'a pas le même sens dans les deux cas. Comme copule principale, il signifie : « égale *par définition* », et cette espèce d'égalité, conventionnelle et arbitraire en quelque sorte, est bien différente de l'*équivalence*. Une définition, en Mathématique et en Logistique, consiste à donner un sens à un symbole *qui n'en a pas encore*, en le posant comme équivalent à un ensemble de symboles où il ne figure pas, et qui a déjà un sens. Aussi une définition mathématique ou logique n'est-elle qu'une convention d'écriture, une abréviation. Ce n'est pas une proposition (qui serait nécessairement vraie ou fausse), encore moins un *principe*. Cf. § D : *Méthodologie*.

« Si p implique q, et si p implique r, p implique $q \frown r$ (l'affirmation simultanée de q et de r). »

5° le *principe du syllogisme* (*hypothétique*) :

$$p \supset q \, . \, q \supset r \, . \supset . \, p \supset r$$

« Si p implique q, et si q implique r, p implique r. » Dans le langage de la Logique des relations, ce principe signifie que la relation d'implication est *transitive*.

On considère généralement le principe du syllogisme comme le fondement ou le type de toute déduction. Mais tous les autres principes de la Logique, qui sont indépendants de celui-là, peuvent servir, et servent en fait, de type et de fondement à des déductions. Il y a plus : le principe du syllogisme, comme les autres, ne peut justifier une déduction particulière quelconque qu'en vertu d'un autre principe, qui s'énonce : « Si l'on a une implication (vraie) $p \supset q$, et si l'hypothèse p est vraie, la thèse q est aussi vraie, de sorte qu'on peut l'affirmer isolément ». Et en effet, en quoi consiste une déduction, par exemple une déduction syllogistique? Elle ne consiste pas simplement à constater et à affirmer une relation d'implication entre les prémisses et la conclusion : elle consiste en outre à constater que les prémisses sont vraies (ou supposées telles), et à affirmer la conclusion « absolument », c'est-à-dire isolément. Or cela ne peut se faire qu'en vertu du principe précédent. Ce principe est donc indispensable et fondamental en Logique : c'est le nerf de toute déduction, puisque seul il permet de passer des prémisses à la conclusion : de remplacer celles-là par celle-ci, et par suite d'*avancer* par étapes dans un raisonnement. Pour cette raison, nous l'appellerons désormais le *principe de déduction* [1].

Il est remarquable que ce principe ne peut pas s'exprimer symboliquement. On pourrait être tenté de l'écrire :

$$p \, . \, p \supset q \, . \supset . \, q$$

1. C'est aussi le principe du *raisonnement hypothétique* (*modus ponens*) : « Si p est vraie, q est vraie; or p est vraie; donc q est vraie. » Le *modus*

mais cette formule est indissoluble, et ne permet pas d'affirmer séparément q. Pour pouvoir le faire, il faudrait pouvoir supprimer l'hypothèse $p . p \supset q$, ce qui ne se peut qu'en vertu du principe en question. Comme le remarque M. Russell, ce principe marque la limite du symbolisme. Il n'y a rien d'étonnant, d'ailleurs, à ce que le symbolisme ne réussisse pas à traduire tous les principes, car il faut évidemment définir verbalement les premiers symboles et les premières formules.

Ce n'est pas tout : à ce principe il faut adjoindre le *principe de substitution*, qui s'énonce : « Dans une formule générale, à un terme général ou indéterminé on peut substituer un terme particulier ou individuel ». Cela est évident, puisqu'une formule générale n'a de valeur et même de sens qu'en tant qu'elle peut s'appliquer à des termes particuliers. Ce principe, comme le précédent, ne peut pas se traduire en symboles, justement parce qu'il fonde l'emploi des symboles; et, en effet, on ne pourrait l'exprimer, y compris la notion de « terme particulier », qu'au moyen de symboles généraux ; mais, pour l'appliquer à des termes réellement particuliers, il faudrait pouvoir substituer ceux-ci aux termes généraux qui les représenteraient dans la formule, ce qui ne se peut qu'en vertu du principe lui-même[1].

Il convient d'introduire dans le Calcul logique deux termes particuliers, le vrai (V) et le faux (Λ). On peut les définir formellement comme suit :

$$\Lambda \supset x \quad , \quad x \supset V$$

quelle que soit la proposition x; autrement dit, « le faux implique tout, et le vrai est impliqué par tout ». On peut démontrer que les termes ainsi définis sont uniques. Cette

tollens (« or q est fausse; donc p est fausse ») se déduit du précédent au moyen du *principe de contraposition* (voir plus bas).

1. Quant au *principe de la substitution des équivalents*, mis en avant par Stanley Jevons, ce n'est pas un axiome, mais un théorème ou plutôt un ensemble de théorèmes qu'on démontre pour chaque relation ou opération particulière. Il constitue en effet une propriété spéciale de certaines relations ou opérations, à savoir l'*uniformité*. Par exemple, l'axiome d'Euclide : « Égal ajouté à égal donne égal » signifie que l'addition est une opération uniforme; et ainsi de suite.

définition un peu paradoxale se justifie par toutes les conséquences qu'on en déduit formellement.

On peut définir la *somme logique* de deux propositions comme suit : La somme logique de deux propositions p et q est une proposition s qui est impliquée par chacune d'elles, et qui implique toute proposition impliquée par chacune d'elles. Cette définition formelle se traduit par les formules :

$$p \supset s \,.\, q \supset s : p \supset x \,.\, q \supset x \,.\, \supset . \, s \supset x$$

On s'aperçoit aisément que la somme logique de deux propositions est leur *alternative* : « ou p est vraie, ou q est vraie », ou simplement : « p ou q ». On la représente par $p \smile q$. Les formules précédentes deviennent en conséquence :

$$p \supset p \smile q \,.\, q \supset p \smile q : p \supset x \,.\, q \supset x \,.\, \supset . \, p \smile q \supset x$$

Les deux premières s'appellent, par analogie, *principe de simplification* ; la dernière, *principe de composition*.

On peut maintenant définir formellement la *négation*. La négation (ou mieux, la *négative*) d'une proposition p se représente par $-p$, qui s'énonce : non-p. C'est, par définition, une proposition qui vérifie avec p les deux relations suivantes :

$$p \frown -p = \Lambda \qquad\qquad p \smile p- = V$$

« L'affirmation simultanée de p et de non-p est fausse ; l'alternative de p et de non-p est vraie. » La première de ces formules est le *principe de contradiction* : « p et non-p ne peuvent être vraies à la fois ». La seconde est le *principe du milieu exclu* : « ou p est vraie, ou non-p est vraie ». Ainsi ces deux « principes » constituent en réalité, *réunis*, la définition de la négation. Ils sont donc indépendants l'un de l'autre, et indépendants chacun du principe d'identité [1].

Pour démontrer que la négative d'une proposition est unique,

1. Toutes les démonstrations par lesquelles on a prétendu déduire ces deux principes, soit l'un de l'autre, soit du principe d'identité, présupposent la notion de négation, et constituent par conséquent un cercle vicieux (ou tout au moins une pétition de principe, si l'on prend la négation pour notion première).

il faut admettre encore une proposition première, le *principe de contraposition* [1] :

$$p \supset q \,.\supset .\, -q \supset -p$$

« Si p implique q, non-q implique non-p », d'où l'on déduit la *loi de double négation* :

$$-(-p) = p$$

« La négative de non-p équivaut à p », ou, comme on dit vulgairement : Deux négations valent une affirmation.

Pour compléter le Calcul des propositions, il faut introduire un dernier principe, que nous appellerons le *principe d'assertion*, et qui s'énonce par l'une ou l'autre des formules suivantes [2] :

$$p = (p = \mathrm{V}) \qquad -p = (p = \Lambda)$$

quelle que soit la proposition p. En d'autres termes, une proposition quelconque p équivaut à l'affirmation : « p est vraie », ou à l'affirmation : « non-p est fausse » [3].

Du principe d'assertion on peut déduire le *principe d'importation et d'exportation*, que M. Peano prend pour proposition première :

$$p \,.\supset .\, q \supset r :=.\, p \frown q \supset r$$

« Dire que p implique que q implique r, c'est dire que p et q réunies impliquent r. » Ce principe peut se décomposer en deux implications inverses, le *principe d'importation* :

$$p \,.\supset .\, q \supset r : \supset .\, p \frown q \supset r$$

en vertu duquel on peut *importer* dans l'implication $q \supset r$

1. Ainsi appelé parce qu'il est le fondement de la contraposition classique (par laquelle de « Tout a est b » on déduit « Tout non-b est non-a »). C'est aussi, comme nous l'avons dit, le fondement du raisonnement hypothétique (*modus tollens*), et par suite de tous les raisonnements dits *par l'absurde*, si fréquents en Mathématiques.

2. Ces deux formules sont équivalentes, car on peut démontrer, au moyen des principes précédents, que $-\mathrm{V} = \Lambda$, et que :

$$(p = q) = (-p = -q)$$

3. Cette traduction est légitime, car, en vertu de la loi de double négation, la négation de $-a$ est a.

l'hypothèse p qui en est la condition; et le *principe d'exportation* :

$$p \frown q \supset r . \supset : p . \supset . q \supset r$$

en vertu duquel on peut *exporter* de l'implication $p \frown q \supset r$ une de ses hypothèses, p.

Le principe d'assertion permet encore de réduire une implication à une alternative, au moyen de l'équivalence :

$$p \supset q . = . -p \frown q$$

« Dire que p implique q, c'est affirmer non-p ou q », c'est-à-dire : « ou p est fausse, ou q est vraie ». On se rappelle que c'est par cette alternative que nous avons *expliqué* plus haut l'implication.

Le principe d'assertion a encore une foule de conséquences importantes, dont les unes sont évidentes et conformes au bon sens, et les autres paradoxales. En vertu du principe du milieu exclu, on peut affirmer que toute proposition est vraie ou fausse, et, en vertu du principe de contradiction, qu'elle ne peut être à la fois vraie et fausse [1]. Le vrai et le faux sont donc deux valeurs *exclusives* l'une de l'autre, et les *seules* que puisse prendre une proposition quelconque.

Mais de ce truisme résultent des conséquences comme celles-ci :

$$p = q . \smile . p = -q$$

c'est-à-dire : Une proposition quelconque équivaut à une autre proposition quelconque ou à sa négative (et, en effet, de deux propositions qui sont la négative l'une de l'autre, l'une est vraie et l'autre fausse, nécessairement). Toutes les propositions vraies sont équivalentes; toutes les propositions fausses sont équivalentes. Chaque proposition fausse implique toutes les propositions (vraies ou fausses); chaque proposition vraie est impliquée par toutes les propositions (fausses ou vraies). Ces

1. Seul, le principe d'assertion permet de démontrer que « le vrai n'est pas le faux », en symboles : $V - = \Lambda$. Cette formule ne peut pas se déduire des autres principes, comme le prouve le Calcul des classes.

paradoxes inévitables (car ce sont des conséquences nécessaires du calcul, et cela dans n'importe quel système de Logique) s'expliquent par le fait que l'implication ici considérée est l'*implication matérielle*, et non pas l'*implication formelle*, qu'on définira plus loin, et à laquelle tout le monde pense quand on parle d'implication. L'implication matérielle ($p \supset q$) ne signifie rien de plus que ceci : « Ou p est fausse, ou q est vraie[1]. » Peu importe que les propositions p et q aient entre elles un rapport logique ou empirique quelconque ; l'implication est vérifiée dès que p est fausse (quelle que soit q) ou dès que q est vraie (quelle que soit p). Voilà pourquoi on arrive à ce résultat paradoxal, que le faux implique le vrai.

Ces vérités paradoxales servent d'ailleurs à résoudre correctement certains paralogismes ou certains paradoxes où le bon sens vulgaire risquerait de s'embarrasser. Tel est, par exemple, le problème de Lewis Carroll : « q implique r ; mais p implique que q implique non-r ; que faut-il en conclure ? » On raisonnera comme il suit : p implique non-q ou non-r ; or non-r implique non-q ; donc p implique non-q, c'est-à-dire la vérité de p implique la fausseté de q. Mais Lewis Carroll raisonne autrement : Si q implique r, il est impossible que q implique non-r ; donc p implique l'impossible, et par suite est faux. Cette conclusion est fausse, parce qu'il est possible que q implique à la fois r et non-r ; seulement alors q est faux (comme impliquant deux propositions contradictoires)[2].

§ B. — Calcul des Classes[3].

Tandis que Boole et Schröder, sous l'influence de la Logique classique, considéraient le Calcul des classes comme antérieur au Calcul des propositions, M. Russell le considère comme postérieur. Pour lui, l'idée de classe est une notion dérivée,

1. Cette équivalence est bien connue en Logique classique, car c'est elle qui sert à transformer un jugement hypothétique en jugement disjonctif, ou inversement.
2. Voir le *Mind* d'avril et juillet 1905 (p. 293, 400).
3. Russell, *op. cit.*, §§ 20-26.

subordonnée à celle de *proposition*, et même à celle de *fonction*. On appelle *fonction*, en Logique comme en Mathématique, toute expression contenant une ou plusieurs variables[1]. Mais la notion logique de fonction est beaucoup plus étendue que la notion mathématique, car elle comprend même les relations affirmées ou propositions (ce que l'on appelle en Mathématique les équations). Par exemple, en Mathématique, « $\sin x$ » est une fonction, « $\sin x = 1$ » est une équation; mais, en Logique, ces deux expressions sont des *fonctions*.

Maintenant, qu'est-ce qu'une variable? La réponse à cette question est très difficile : on peut dire, en gros, qu'une variable est un terme indéterminé auquel on peut substituer un terme déterminé quelconque, qu'on appelle une *valeur* constante de la variable. On appelle *fonction propositionnelle* une fonction logique qui, pour toute valeur attribuée à la variable (ou aux variables), *devient* une proposition. Une fonction propositionnelle *n'est pas* par elle-même une proposition, car elle n'est ni vraie ni fausse, elle est indéterminée. Elle ne *devient* une proposition vraie ou fausse que lorsqu'on en détermine le sens en substituant à la variable une valeur particulière.

Cela posé, soit[2] φx une fonction propositionnelle d'une variable x. Cette fonction a un sens (est une proposition) pour chaque valeur attribuée à x; elle est donc (en général) vraie pour certaines de ces valeurs, et fausse pour les autres. Elle détermine ainsi une *classe*, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles elle est vraie. Cette classe sera désignée par le symbole : $x \ni \varphi x$, qui peut se lire : « l'ensemble des x qui vérifient φx ». Le signe $\ni$ est donc un symbole opératoire qui fait correspondre une classe à une proposition[3]. Il donne lieu à un axiome qui se formule comme suit :

$$\varphi x = \psi x \,.\, \supset : x \ni \varphi x \,.=.\, x \ni \psi x$$

1. V. Frege, *Function und Begriff* (Jena, Pohle, 1891), et *Was ist eine Funktion?* ap. *Boltzmann-Festschrift* (Leipzig, Barth, 1904).

2. Nous désignerons les fonctions par des lettres grecques, pour ne pas les confondre avec les propositions et avec les classes (voir p. 18, note 1).

3. Ce symbole se traduit dans le langage par *qui*, *tel que*, etc. : « les x qui vérifient φx; les x tels que φx est vraie, etc. » On voit qu'il est

ce qui signifie : « Si les deux fonctions propositionnelles φx et ψx sont équivalentes, les classes correspondantes sont égales (identiques) ». En termes mathématiques, cela veut dire que la correspondance des classes aux fonctions propositionnelles est *uniforme*.

Le symbole inverse ε fait inversement correspondre une proposition à une classe. Il signifie qu'un terme particulier (un *individu* logique) *appartient à* une classe; soit a une classe[1], la formule : $k \,\varepsilon\, a$ signifie que l'individu k appartient à la classe a ou, comme on dit, « est un a »[2].

Combinons maintenant les deux symboles inverses ε et $\ni$, et écrivons, par exemple :

$$k \,\varepsilon\, (x \ni \varphi x)$$

Cette proposition signifie que k appartient à l'ensemble des valeurs qui vérifient la fonction φx, et par suite vérifie φx; autrement dit, que φk est vraie. On peut donc écrire l'équivalence :

$$k \,\varepsilon\, (x \ni \varphi x) = \varphi k$$

Inversement, il est aisé de voir que l'expression :

$$x \ni (x \,\varepsilon\, a)$$

représentant l'ensemble des valeurs de x qui vérifient la proposition « $x \,\varepsilon\, a$ », représente la classe a elle-même; on peut donc écrire :

$$x \ni (x \,\varepsilon\, a) = a$$

et dire, *grosso modo*, que les deux symboles $x \,\varepsilon$ et $x \ni$ se détruisent mutuellement[3].

indispensable pour traduire en formules les propositions « relatives », qui échappaient entièrement à la Logique classique.

1. Nous désignerons les classes par les premières lettres de l'alphabet : a, b, c,... les individus déterminés par les lettres k, l, m, n,... et les individus indéterminés (variables) par x, y, z.

2. De là vient le choix de la lettre ε, initiale du mot ἐστί.

3. L'ordre logique attribué par M. Russell à ces symboles est l'inverse de celui que leur assigne M. Peano. Celui-ci commence par poser comme indéfinissable la relation $x \,\varepsilon\, a$, puis il définit la relation inverse $\ni$ en posant :

$$x \ni (x \,\varepsilon\, a) = a.$$

Mais cela suppose qu'à toute fonction propositionnelle de x correspond

La correspondance ainsi établie entre les fonctions propositionnelles et les classes permet de définir entre les classes des relations analogues à celles qui existent entre les propositions. Ce sont d'abord la relation d'*inclusion*, qui correspond à l'*implication* :

$$a \supset b \,.=:\, x \varepsilon a \,.\supset.\, x \varepsilon b$$

« Dire que la classe a est contenue dans la classe b, c'est, par définition, dire que « x est un a » implique « x est un b ». »

Et la relation d'*égalité*, qui correspond à l'*équivalence* des propositions :

$$a = b \,.=:\, x \varepsilon a \,.=.\, x \varepsilon b$$

« Dire que les classes a et b sont égales, c'est dire que les propositions « x est un a » et « x est un b » sont équivalentes[1]. »

On a par suite l'équivalence :

$$a = b \,.=.\, a \supset b \,.\, b \supset a$$

entre classes comme entre propositions.

Deux classes égales sont identiques, puisque, en vertu de l'équivalence précédente, tout élément de l'une appartient à l'autre, et *vice versa*.

On peut définir ensuite la multiplication logique des classes :

$$a \frown b \,.=.\, x \ni (x \varepsilon a \,.\, x \varepsilon b)$$

« Le produit logique des classes a et b est l'ensemble des x qui sont à la fois des a et des b. » D'où, en opérant sur les deux membres par $x\varepsilon$, on tire :

$$x \varepsilon (a \frown b) \,.=.\, x \varepsilon a \,.\, x \varepsilon b$$

une classe, c'est-à-dire que toute assertion relative à x revient à affirmer que x appartient à une classe déterminée au moins implicitement. Or c'est là une hypothèse gratuite (c'était le postulat de la Logique classique) et qui donne lieu à de graves difficultés. En tout cas, le symbole $\ni$ n'a d'usage réel que lorsque la proposition relative à x n'est pas déjà de la forme $x \varepsilon a$.

1. Cette formule est analogue à celle de l'axiome énoncé plus haut :

$$\varphi x = \psi x \,.\supset:\, x \ni \varphi x \,.=.\, x \ni \psi x$$

mais, pour qu'elle lui fût identique, il faudrait, d'abord, qu'on pût remplacer la copule $\supset$ par la copule $=$; ensuite, qu'on pût affirmer que toute fonction propositionnelle est réductible à une assertion de la forme : $x \varepsilon a$.

« Dire que x est un « a et b », c'est affirmer à la fois que x est un a et que x est un b. »

De même, on définit l'addition logique des classes :

$$a \cup b . = . x \ni (x \varepsilon a . \cup . x \varepsilon b)$$

« La somme logique des classes a et b est l'ensemble des x qui sont, soit des a, soit des b. » D'où l'on tire :

$$x \varepsilon (a \cup b) . = . x \varepsilon a . \cup . x \varepsilon b$$

« Dire que x est un « a ou b », c'est affirmer que x est un a ou que x est un b ».

De même, enfin, on définit la négative d'une classe :

$$-a . = . x \ni (x - \varepsilon a)$$ (1)

« La négative $-a$ de la classe a est l'ensemble des x qui *ne sont pas* des a. » D'où l'on tire :

$$x \varepsilon - a . = . x - \varepsilon a$$

« Dire que x est un non-a, c'est dire que x n'est pas un a. »

Il importe de distinguer soigneusement les deux relations ε et $\supset$, qui, confondues par le langage, ont été longtemps identifiées par les logiciens [2]. Par exemple, dans le syllogisme classique :

Tout homme est mortel
Socrate est homme
Donc Socrate est mortel

la copule de la majeure est $\supset$, mais celle de la mineure et de la conclusion est ε. En effet, $\supset$ est une relation entre deux *classes*, dont la première est contenue dans la seconde, tandis que ε est la relation d'un *individu* à une *classe* dont il fait partie. Il en résulte que le syllogisme précédent a pour formule :

$$a \supset b . x \varepsilon a . \supset . x \varepsilon b$$

tandis qu'un syllogisme ordinaire (entre classes) a la formule :

$$a \supset b . c \supset a . \supset . c \supset b$$

1. Le symbole $-\varepsilon$ est la négation du symbole ε; cette négation porte sur la proposition tout entière dont ε est la copule.
2. Cette distinction est due à M. Peano.

bien distincte de la précédente. Au point de vue du calcul, la relation ε diffère de la relation $\supset$ en ce qu'elle n'est pas *transitive* : de $(x \,\varepsilon\, y \,.\, y \,\varepsilon\, z)$ on ne peut pas conclure $x \,\varepsilon\, z$, parce que y est une classe dont x est un individu, et que z est une classe dont la classe y est un individu : z est donc une classe de classes analogues à y, et ne peut (en général) comprendre x parmi ses éléments.

Ces considérations obligent à distinguer même une classe *singulière* de l'individu *unique* qu'elle contient, de sorte qu'on ne peut pas poser en général : $x \,\varepsilon\, x$. La classe singulière formée du seul élément x sera représentée par ιx, « égal à x »[1]. On définit formellement ce symbole comme suit :

$$\iota x = y \ni (y = x)$$

D'où :

$$y \,\varepsilon\, \iota x \,.=.\, y = x$$

ce qui montre que la combinaison des deux symboles ε et ι équivaut au symbole $=$. On a donc toujours : $x \,\varepsilon\, \iota x$.

Inversement, si a est une classe singulière, son élément unique sera représenté par $\text{℩}a$, qu'on peut lire : « le a ». En résumé, le signe ι transforme un individu en une classe singulière; et le signe inverse ℩ transforme une classe singulière en un individu. On a les deux égalités équivalentes :

$$a = \iota x \qquad\qquad x = \text{℩}a.$$

Nous pouvons maintenant définir l'*implication formelle*. C'est l'espèce d'implication qui existe entre deux fonctions propositionnelles contenant les mêmes variables, et qui vaut pour toutes les valeurs possibles de ces variables. Une implication formelle enveloppe donc l'affirmation simultanée d'une multitude d'implications matérielles, dont chacune correspond à une valeur différente des variables : et elle n'est vraie que si *toutes* ces implications sont vraies. C'est donc, à proprement parler, un ensemble d'implications. On obtient une implication formelle (vraie ou fausse) quand dans une implication matérielle on change une constante en variable. Par

1. La lettre ι est l'initiale du mot ἴσος.

exemple, si dans « Socrate est homme implique que Socrate est mortel » on remplace le terme Socrate par l'indéterminée x, on trouve : « x est homme implique que x est mortel »; et cette fonction propositionnelle est une implication formelle, car elle est vraie quel que soit x [1]. Non seulement, en effet, on peut substituer à x n'importe quel homme, mais n'importe quel autre terme : car si « x est homme » n'est pas vrai (pour une valeur donnée de x), l'implication matérielle correspondante sera sûrement vraie.

Nous venons de montrer, par un exemple, que la variabilité des variables logiques est en principe illimitée. Nous avons dit, d'ailleurs, qu'une implication formelle vaut pour *toutes les valeurs possibles* de la variable [2]. Si une implication formelle ($\varphi x \supset \psi x$) ne valait que pour un certain ensemble de valeurs de la variable, cet ensemble formerait une classe a, et l'on devrait écrire l'hypothèse $x \varepsilon a$ comme condition de l'implication précédente; on aurait ainsi :

$$x \varepsilon a . \supset . \varphi x \supset \psi x$$

Or, dans cette nouvelle implication formelle, x peut prendre toutes les valeurs possibles, sans aucune restriction. Donc toute implication conditionnelle ou limitée revient en définitive à une implication illimitée ou inconditionnée.

La formule précédente est le type des théorèmes de Mathématiques. En effet, une formule mathématique ne vaut, en

1. En effet, elle équivaut, par définition, à la proposition universelle : « Tout homme est mortel »; en symboles :

$$a \supset b . = : x \varepsilon a . \supset . x \varepsilon b$$

De cette équivalence se déduit la 2e formule du syllogisme. En effet, cette équivalence contient l'implication suivante :

$$a \supset b . \supset : x \varepsilon a . \supset . x \varepsilon b$$

qui, grâce au *principe d'importation*, devient la formule en question :

$$a \supset b . x \varepsilon a . \supset . x \varepsilon b$$

2. Pour faire ressortir cette condition, M. Peano inscrit la ou les variables comme indices au signe $\supset$: exemple : $\varphi x \supset_x \psi x$. Cette notation a en outre l'avantage de distinguer nettement une implication formelle d'une implication matérielle.

général, que lorsque les variables qui y figurent restent dans un certain domaine de variabilité. Il faut donc énoncer comme hypothèse que les variables appartiennent à tel ou tel ensemble de valeurs. Par exemple, la propriété commutative de la multiplication s'écrira comme suit :

$$x, y \varepsilon \mathrm{N} . \supset . x \times y = y \times x$$

« Si x et y sont des nombres entiers (N), $x \times y = y \times x$. » Cette implication est toujours vraie, car si x et y ne sont pas des nombres entiers, l'hypothèse est fausse. Il en est de même si, au lieu de « nombre entier », on met « nombre rationnel », « nombre réel », « nombre complexe ordinaire » ou « vecteur ». Mais l'implication ne serait plus vraie si l'on mettait « quaternion ». Cela montre la nécessité d'une hypothèse qui limite le domaine des variables. D'ailleurs, le plus souvent, sans une telle hypothèse la thèse n'aurait plus de sens, parce qu'on ne saurait pas la nature des termes qui y figurent. Dans les traités de Mathématiques ordinaires, les hypothèses de ce genre sont énoncées verbalement ou sous-entendues dans le contexte. Mais une formule n'est logiquement complète que lorsqu'elle comprend son hypothèse explicitement énoncée en symboles.

On comprend maintenant la différence entre l'implication formelle et l'implication matérielle. D'abord, celle-là enveloppe une infinité de cas, c'est une proposition universelle (exemple : Tout homme est mortel), tandis que celle-ci ne porte que sur un cas particulier (individuel et isolé). En outre, les deux membres d'une implication formelle doivent contenir les mêmes variables, c'est-à-dire porter, au moins en partie, sur le même sujet ; tandis que les deux membres d'une implication matérielle peuvent être deux propositions n'ayant aucun terme commun ni même aucune analogie. Au point de vue de la Logique formelle, « César a passé le Rubicon » implique « Socrate a bu la ciguë », et même : « César est vivant » implique « 2 et 2 font 4 », du moment que la première proposition est fausse ou que la seconde est vraie. Seulement, on est habitué à

ne considérer que des implications formelles, en raison de leur intérêt scientifique et de leur usage pratique, de sorte que même les implications matérielles sont regardées comme des implications formelles. Par exemple, « Socrate est homme implique Socrate est mortel » est une implication matérielle. Mais tout le monde la comprend comme une implication formelle, ou du moins comme un cas particulier, un exemple ou une application de l'implication formelle : « Si x est homme, x est mortel. » On sent confusément que l'individualité de Socrate est indifférente dans cette implication, et qu'on pourrait lui substituer n'importe quel autre homme (et même, au point de vue formel, n'importe quel individu). La preuve en est que l'on peut affirmer l'implication matérielle : « Socrate est un triangle implique Socrate est mortel », mais elle choque parce que l'on entend par là l'implication formelle *fausse* : « Si x est un triangle, x est mortel. »

Enfin l'implication formelle est analogue, et même en général équivalente, à la relation d'inclusion entre classes, de sorte que le Calcul des classes coïncide avec le Calcul des fonctions propositionnelles, tandis qu'il ne coïncide pas avec le Calcul des propositions. La confusion illégitime de ces deux calculs est la source de certains paradoxes que nous n'avons pas à discuter ici.

M. Peano n'admet, dans son Calcul, que des implications formelles, dont les deux membres contiennent des variables. Cette restriction est possible en Mathématique, où l'on n'a à considérer que des implications formelles, et elle a l'avantage d'éviter radicalement la confusion que nous venons de signaler; mais elle est trop exclusive, car elle bannit de la Logique l'implication matérielle, qui est, en définitive, l'élément de toute implication formelle.

Nous avons parlé plus haut des classes singulières, c'est-à-dire formées d'*un seul* individu. Mais nous n'avons pas défini le nombre *un*, ni même l'individu. Selon l'habitude des Mathématiques, on ne définit pas l'individu, mais bien l'*identité* des individus. On dira que deux individus k et l sont identiques, si

le second appartient à toute classe dont le premier fait partie; ce qui s'écrit symboliquement [1] :

$$k \equiv l . = : k \varepsilon a . \supset_a . l \varepsilon a$$

Il importe de remarquer que l'identité des individus est logiquement distincte de l'égalité des classes, de même que les individus k et l sont distincts des classes singulières ιk et ιl. C'est pourquoi nous employons un signe particulier $\equiv$ pour désigner cette relation.

Voici comment on peut définir la classe nulle (c'est-à-dire la classe qui ne contient aucun terme). Nous avons dit que les propositions sont susceptibles de deux valeurs, et de deux seulement, *vrai* (V) et *faux* (Λ). De même, les fonctions propositionnelles sont susceptibles de deux valeurs extrêmes (et en général d'une infinité d'autres), qui sont : *toujours vrai* (V) et *toujours faux* (Λ). Il importe de ne pas confondre ces deux sens des symboles V et Λ; on les distingue aisément, suivant qu'ils s'appliquent à des propositions ou à des fonctions propositionnelles. Cela posé, soit une fonction propositionnelle φx qui est toujours fausse : on définira la classe nulle comme la classe correspondante; symboliquement :

$$\varphi x = \Lambda . \supset . \Lambda = x \ni \varphi x$$

« Si φx est toujours fausse, Λ est la classe des x qui vérifient φx. » C'est la classe nulle ou vide, puisque par hypothèse *aucune* valeur de x ne vérifie φx.

1. Dans le second membre de cette formule la copule $\supset$ suffit, et n'a pas besoin, comme il semble au premier abord, d'être remplacée par la copule $=$. En effet, puisque :

$$k \varepsilon - a . = . k - \varepsilon a$$

on a :

$$k \varepsilon a . \supset_a . l \varepsilon a : = : k - \varepsilon - a . \supset_a . l - \varepsilon - a : = : l \varepsilon - a . \supset_a . k \varepsilon - a$$

Or, dans cette dernière implication, $-a$ est une classe quelconque, on peut donc la remplacer par a, et écrire :

$$l \varepsilon a . \supset_a . k \varepsilon a$$

Ainsi de $k \varepsilon a . \supset_a . l \varepsilon a$ on peut déduire la réciproque :

$$l \varepsilon a . \supset_a . k \varepsilon a$$

et par conséquent l'égalité :

$$k \varepsilon a . =_a . l \varepsilon a$$

Cela posé, pour exprimer qu'une classe *a existe*, qu'il existe des *a* ou au moins un *a*, on dira qu'elle n'est pas nulle, ce qui s'écrit :

$$a -= \Lambda$$

On écrit souvent cette proposition sous la forme :

$$\exists\, a$$

« il y a des *a* », qui est plus commode dans les applications mathématiques.

La classe nulle jouit de propriétés paradoxales, qui dérivent de celles de l'implication matérielle. Ainsi, puisqu'une proposition fausse implique toute autre proposition, la classe nulle est contenue dans toute autre classe, en vertu de l'implication générale :

$$\varphi x \supset \psi x \,.\, \supset : x \ni \varphi x \,.\, \supset .\, x \ni \psi x$$

ou de l'équivalence analogue :

$$x \,\varepsilon\, a \,.\, \supset .\, x \,\varepsilon\, b : = .\, a \supset b$$

Comment exprimera-t-on, maintenant, qu'une classe *a* est singulière, c'est-à-dire ne contient qu'un individu (qu'il n'y a qu'un *a*)? On exprimera, d'abord, qu'elle existe (n'est pas nulle), et ensuite, que si deux individus quelconques lui appartiennent, ils sont identiques. En symboles :

$$a -= \Lambda : x \,\varepsilon\, a \,.\, y \,\varepsilon\, a \,.\, \supset_{x,y} .\, x \equiv y$$

C'est là, en même temps, la définition logique du nombre 1, de même que la définition de la classe nulle est la définition logique du nombre 0. Et ces deux définitions sont exemptes de tout cercle vicieux, car elles n'impliquent que les relations logiques ε, $\supset$, et les relations d'identité et de diversité entre individus que nous avons définies ci-dessus. Nous avons exposé en détail cette définition, parce qu'elle est d'une importance capitale pour la démonstration de cette thèse, que l'Arithmétique repose sur des fondements purement logiques; car cette thèse est bien près d'être démontrée quand on l'a établie pour les deux premiers nombres entiers, 0 et 1 [1].

1. Nous devons déclarer, à ce propos, que les explications précédentes annulent les conclusions de notre article *Sur une définition logique du*

§ C. — Calcul des Relations [1].

Les deux Calculs des propositions et des classes ne suffisent pas encore à l'analyse logique des Mathématiques. Il faut leur adjoindre le Calcul des relations, qui est beaucoup plus général et plus important à cet égard que les précédents. C'est la partie la plus originale et la plus neuve de l'œuvre de M. Russell. En effet, il a été obligé, d'une part, de compléter sur ce point le symbolisme de M. Peano, et, d'autre part, de réformer radicalement le symbolisme de Peirce et de Schröder, qui sont les fondateurs de ce nouveau Calcul. Ces deux auteurs se plaçaient au point de vue de l'extension, et considéraient une relation comme un ensemble de couples. Voici ce que cela veut dire. Soit une relation binaire (à deux termes) R, nous écrirons (avec M. Russell) « xRy » pour exprimer qu'elle existe entre les individus x et y, c'est-à-dire que x a la relation R avec y. Supposons qu'elle existe aussi entre u et v, entre z et w, etc. Nous écrirons : uRv, zRw, etc.

Au lieu de cela, Peirce et Schröder, faisant abstraction de la relation, la considéraient comme définie uniquement par les couples (x, y), (u, v), (z, w) entre lesquels elle existe, et la représentaient simplement par l'ensemble de ces couples, qu'on peut appeler l'*extension* de la relation. Or cette méthode donne lieu à des difficultés logiques. D'abord, deux ou plusieurs relations

nombre, ap. *Revue de Métaphysique*, t. VIII, p. 23-36 (janv. 1900). Les critiques que nous y adressions à la définition de Schröder ne portent pas contre la définition de MM. Peano et Russell, parce que ceux-ci emploient un symbolisme logique plus complet et plus rigoureux, et distinguent nettement l'individu de la classe singulière qu'il forme. La définition *logique* des premiers nombres entiers se trouve déjà dans Leibniz (*Gerh. Phil.*, VII, 225; *Opuscules inédits*, Phil., VII, B, II, 17 verso; VII, C, 48) sous la forme suivante :

« Si *a* est *m* } unum } duo } tria } quatuor *m*. »
b est *m* } . . . }
c est *m* } . . . . }
d est *m* } . . . . }
et *a*, *b*, *c*, *d* sunt
disparata, erunt

1. Russell, *op. cit.*, §§ 27-30; *Sur la Logique des relations*.

peuvent avoir même extension sans être identiques, c'est-à-dire sans avoir le même sens. Mais cela n'est pas un vice rédhibitoire, car dans la Logique des classes on admet que deux concepts sont équivalents dès qu'ils ont la même extension, ce qui conduit à égaler entre eux des concepts de compréhension différente (par exemple *triangle* et *trilatère*). La difficulté la plus grave est celle-ci : les *couples* par lesquels on prétend définir la relation ne sont pas des *classes*, car ils comportent un *ordre* déterminé : il n'est pas permis, par exemple, d'intervertir x et y, et d'écrire (y, x) au lieu de (x, y). Or la notion d'*ordre* est elle-même une relation, ou du moins suppose une certaine relation entre x et y. Il y a donc une sorte de cercle vicieux (philosophique, sinon logique) à définir une relation par des couples *ordonnés* [1].

On peut ajouter qu'en Mathématiques, où l'on étudie constamment des relations ou des types de relations, il est nécessaire de représenter chaque relation ou type de relations par un symbole spécial facilement maniable et reconnaissable; cela suffit à assurer une supériorité pratique au symbolisme de M. Russell, en dehors même de ses avantages théoriques. D'ailleurs, même en Logique, nous avons eu à considérer diverses relations, figurées par les symboles $=$, $\supset$, ε; il est naturel de généraliser cette notation si commode, et de représenter une relation quelconque entre deux termes x et y par une lettre (majuscule) intercalée entre eux.

Dans cette conception *unitaire* des relations, une relation peut servir à définir des classes, au lieu d'être définie par elles. Toute relation a un sens, de sorte qu'on peut et doit distinguer son premier terme et son second terme, son *antécédent* et son *conséquent* [2]. On appelle *domaine* d'une relation

1. Selon la remarque de M. Russell, cette erreur vient du préjugé traditionnel, hérité de la Logique classique, qui considère les relations des classes comme antérieures aux autres relations. C'est en vertu du même préjugé qu'on réduisait tous les jugements à des jugements de prédication. Cf. Russell, *A critical exposition of the philosophy of Leibniz*, § 10 (Cambridge, 1900).

2. Les mots anglais sont : *referent* et *relatum*. On ne peut les traduire en français que par les barbarismes : *relatant* et *relaté*. Mais dans une

l'ensemble de ses antécédents. Nous proposons d'appeler *codomaine* de la relation l'ensemble de ses conséquents [1]. L'ensemble des antécédents et des conséquents sera le *champ* de la relation : c'est donc la somme logique de son *domaine* et de son *codomaine*.

Un exemple simple fera comprendre ces définitions. Soit la relation *père* : son domaine est l'ensemble des pères, son codomaine est l'ensemble des enfants (fils ou filles). On voit immédiatement qu'ils ne sont pas égaux. Quant au champ, il est la somme logique des deux ensembles, c'est-à-dire l'ensemble des hommes (ici égal au codomaine). La relation *mari* a pour domaine l'ensemble des hommes mariés, pour codomaine l'ensemble des femmes mariées, et pour champ l'ensemble des gens mariés.

Un premier axiome du Calcul des relations est le suivant : « Si R est une relation, xRy est une proposition pour toutes les valeurs de x et de y ». Bien entendu, cette proposition peut être vraie pour certains couples de valeurs et fausse pour les autres.

Un second axiome est celui-ci : « Toute relation a sa converse ». Cela veut dire que, si la relation R existe entre deux termes quelconques x et y, il existe entre y et x (pris dans l'ordre inverse) une relation ${}^{c}R$, appelée la *converse* de R : et que, R étant la même, ${}^{c}R$ est toujours la même. *Convertir* une relation, c'est remplacer xRy par $y\,{}^{c}Rx$. La *conversion* s'exprime, en langage symbolique précis, par la formule suivante :

$$xRy \,.=_{x,y}.\, y\,{}^{c}Rx$$

qui signifie que xRy implique $y\,{}^{c}Rx$, et réciproquement, quels que soient x et y. La conversion ayant pour effet d'intervertir les antécédents et les conséquents, le domaine de la relation

langue artificielle comme l'*Esperanto*, on dira fort bien : *rilatanto*, *rilatato* (ce participe passif serait d'autant mieux justifié qu'en *Esperanto* le verbe *rilati* peut être employé comme actif).

1. Parce que le *codomaine* est, comme on le verra plus loin, le domaine de la relation *converse*.

primitive devient le codomaine de la relation converse, et inversement.

Un troisième axiome est le suivant : « Toute relation a sa négative, qui est une relation ». Cela signifie que nier la relation xRy, c'est affirmer une relation $xR'y$ entre les mêmes termes, et que la relation R' est la même tant que R reste la même. Symboliquement, on a, en représentant la négative de R par $-R$:

$$-(xRy) = x - Ry \text{ (1)}$$

Naturellement, la relation négative est convertible comme la relation positive; et l'on démontre aisément que la converse de la négative est identique à la négative de la converse.

Les relations sont susceptibles d'une combinaison spéciale qu'on appelle la *multiplication relative*. Soient deux relations quelconques R, S; si l'on a entre les individus x, y, z les relations xRy, ySz, on a entre les individus x et z une relation complexe qu'on représente par $R*S$ et qu'on nomme le *produit relatif* de R et de S. Cela implique un axiome, qu'on formule comme suit :

« Le produit relatif de deux relations est une relation. »

En d'autres termes, s'il y a une relation entre x et y et une autre entre y et z, il y a entre x et z une troisième relation qui est uniformément déterminée par les deux premières. Cette opération est très connue et très fréquente dans la pensée la plus vulgaire. Les relations de parenté en offrent des exemples nombreux et variés. Si x est le frère de y, et y le père de z, x est l'oncle de z. Ainsi la relation *oncle* est le produit relatif des relations *frère* et *père*, ce qu'on exprime dans le langage en disant : « l'oncle est le frère du père ».

Il importe de remarquer que la multiplication relative n'est pas commutative comme la multiplication logique : on n'a pas, en général : $R*S = S*R$. Par exemple, le père du frère n'est pas l'oncle, mais le père ou le beau-père [2].

1. Nous avons appliqué par avance cet axiome quand nous avons fait porter le signe de négation sur la copule ε, et non sur la proposition tout entière (p. 20, note 1).

2. Nous passons sous silence, comme M. Russell, l'*addition relative*,

Les relations peuvent se classer d'après les propriétés dont elles jouissent par rapport aux opérations ci-dessus définies. Une relation R est dite *symétrique*, si xRy entraîne toujours et nécessairement yRx, c'est-à-dire si elle est identique à sa converse (car xRy entraîne formellement y^cRx). Elle est dite *non-symétrique* dans le cas contraire, et *asymétrique*, si jamais on n'a à la fois xRy et yRx (quels que soient x et y).

Une relation R est dite *transitive*, si xRy et yRz entraînent toujours et nécessairement xRz, c'est-à-dire si le produit relatif de cette relation par elle-même est identique à cette relation. Elle est dite *non-transitive* dans le cas contraire, et *intransitive* si xRy et yRz excluent xRz (c'est-à-dire si ces trois relations ne coexistent jamais [1]).

Pour illustrer ces définitions par des exemples, l'égalité (mathématique ou logique) est une relation symétrique ($a = b$. $\supset$. $b = a$) et transitive ($a = b$. $b = c$. $\supset$. $a = c$); les relations *plus grand que*, *plus petit que* sont asymétriques et transitives; la relation d'implication ($\supset$) est non symétrique ($a \supset b$ n'entraîne ni n'exclut $b \supset a$) et transitive (en vertu du principe du syllogisme : $a \supset b$. $b \supset c$. $\supset$. $a \supset c$); enfin la relation d'*appartenance à une classe* (ε) est asymétrique et non transitive, comme nous l'avons vu.

Une relation est *uniforme*, quand à chaque antécédent correspond un conséquent, et un seul. Sa converse est uniforme, quand à chaque conséquent correspond un antécédent, et un seul. Nous dirons alors que la relation primitive est *couniforme*. Enfin elle est doublement uniforme (*biuniforme*), quand elle est uniforme ainsi que sa converse. Ces trois cas sont désignés en anglais par les épithètes claires et commodes : *many-one*, *one-many*, *one-one*, qui signifient respectivement que la correspondance a lieu entre *plusieurs* antécédents et *un* conséquent [2],

considérée par Peirce et Schröder, qui n'a aucune utilité logique ou philosophique, et qui sert seulement de contre-partie à la multiplication au point de vue de la « dualité ». C'est une fausse fenêtre pour la symétrie.

1. Russell, *op. cit.*, p. 218.

2. Car le même conséquent *peut* correspondre à plusieurs antécédents.

entre *un* antécédent et *plusieurs* conséquents, entre *un* antécédent et *un* conséquent.

Il importe de citer la formule qui traduit la première de ces définitions, parce qu'elle montre que celles-ci n'impliquent pas l'idée du nombre 1, mais seulement la relation d'identité entre individus :

$$\text{Relation uniforme} = \text{Rel} \frown R \ni (xRy \,.\, xRz \,.\, \supset_x .\, y \equiv z)$$

« Une relation uniforme est une relation R telle que xRy et xRz impliquent, quel que soit x, que y est identique à z. »

Les relations sont susceptibles de relations et d'opérations analogues à celles du Calcul des propositions et des classes. Il convient d'abord de définir l'*inclusion* et l'*égalité* de deux relations.

Une relation R_1 *est contenue* dans une relation R_2 lorsque, toutes les fois qu'elle a lieu entre deux termes quelconques x et y, la relation R_2 a lieu entre les mêmes termes, ce qui s'écrit :

$$R_1 \supset R_2 \,.\, = : xR_1y \,.\, \supset_{x,y} .\, xR_2y$$

Comme on voit, dire que la première *est contenue* dans la seconde, c'est dire qu'elle l'implique ou l'entraîne (exactement comme pour les propositions, et contrairement au préjugé courant qui considère la conséquence comme contenue dans sa prémisse).

Deux relations R_1, R_2 *sont égales* lorsqu'elles sont contenues réciproquement l'une dans l'autre, ce qui s'écrit :

$$R_1 = R_2 \,.\, = .\, R_1 \supset R_2 \,.\, R_2 \supset R_1$$

C'est la même définition que pour les propositions.

Cela posé, on peut définir l'addition et la multiplication *logiques* pour les relations. La *somme logique* de deux relations R_1, R_2 est la relation qui existe entre deux termes quelconques x, y, dès qu'il existe entre eux l'une au moins des relations R_1, R_2 ; ce qui s'écrit :

$$x\,(R_1 \smile R_2)\,y \,.\, = : xR_1y \,.\, \smile .\, xR_2y$$

Le *produit logique* de deux relations R_1, R_2 est la relation qui existe entre deux termes quelconques x, y, dès que les deux relations susdites existent à la fois entre eux; ce qui s'écrit :

$$x\,(R_1 \frown R_2)\,y \;.=:\; xR_1y \;.\frown.\; xR_2y$$

Bien entendu, il faut se garder de confondre le produit logique de deux relations avec leur produit relatif.

On définit d'une manière analogue la somme et le produit logiques, non plus de deux relations, mais des relations de toute une classe : ces nouvelles définitions sont nécessaires, parce que les précédentes ne pourraient s'étendre (par induction complète) qu'à une classe finie de relations, tandis que les nouvelles valent pour une classe quelconque, infinie aussi bien que finie.

On est obligé de postuler, par des axiomes spéciaux, l'existence de la somme et du produit logiques ainsi définis pour toute une classe de relations.

Ces principes établis, on peut démontrer les deux théorèmes suivants :

1° Le produit relatif d'une relation uniforme et de sa converse est une relation transitive et symétrique;

2° *Réciproque du précédent* : Toute relation transitive et symétrique non nulle peut être considérée comme le produit relatif d'une relation uniforme et de sa converse; autrement dit, peut être analysée en deux relations uniformes de même espèce et de même sens qui unissent ses deux termes à un même troisième. Cette réciproque est très importante : elle constitue le *principe d'abstraction*, dont on verra la portée dans la théorie du nombre [1].

Citons enfin un axiome important. Entre deux individus donnés il existe une relation *singulière* qui n'existe pas entre deux autres individus quelconques. Cet axiome est évident au point de vue de l'extension, puisque le couple considéré suffit, à ce point de vue, à définir une relation distincte de toutes

1. Voir chap. II, p. 49.

les autres. Au point de vue de la compréhension, on peut dire que, si l'on considère l'ensemble de *toutes* les relations qui existent entre les deux individus donnés, ce même ensemble n'existe entre aucun autre couple d'individus; autrement dit, si un couple a *toutes* les relations d'un autre couple, ces deux couples sont identiques, ce qui s'écrit :

$$.x_1 R y_1 . \supset_R . x_2 R y_2 : \supset : x_1 \equiv x_2 . y_1 \equiv y_2$$

Cet axiome est pour ainsi dire le *principe des indiscernables* appliqué aux relations.

On en déduit plusieurs propositions remarquables. D'abord, étant données deux classes a et b non nulles, il y a une relation R qui existe entre chaque élément de a et chaque élément de b, mais qui n'existe entre aucun autre couple d'éléments. Ensuite, étant donnée une classe a, il y a une relation ε_a qui consiste à appartenir à la classe a (c'est la relation ε restreinte au domaine a). Enfin, on peut toujours trouver une relation dont le domaine soit une partie du domaine d'une autre relation, et qui soit équivalente à celle-ci dans ce domaine partiel (soit R la relation donnée, a une classe contenue dans le domaine de R : il existe une relation R_a qui coïncide avec R pour tous les éléments de a, et pour eux seulement)[1].

§ D. — Méthodologie.

Tels sont les éléments de la Logique en général, et en particulier de la Logique des Mathématiques, car ils suffisent à fonder toutes les Mathématiques pures. Il reste à indiquer comment on les emploie pour constituer une théorie déductive et formelle, c'est-à-dire à exposer (sommairement) la *méthode* logique des Mathématiques. Il ne s'agit ici, bien entendu, que de la méthode de démonstration, par laquelle on *vérifie* l'enchaînement des idées et des propositions, et non de la méthode d'invention (s'il en existe une), par laquelle on

1. Russell, *Sur la Logique des relations.*

découvre des propositions nouvelles [1]. C'est donc méconnaître ou déplacer la question que d'opposer à la Logistique une prétendue Logique de l'invention qui n'aurait aucune règle précise, si ce n'est de prendre le contre-pied de la vraie Logique démonstrative.

La méthode logique consiste dans un double processus de *réduction* : réduction des notions les unes aux autres, par la *définition*; réduction des propositions les unes aux autres, par la *démonstration*. Démontrer une proposition, c'est la déduire de certaines autres, admises ou données comme vraies, au moyen des *seuls* principes de la Logique, ou, au point de vue formel, par des transformations *permises* par les règles du Calcul logique. Presque tous les principes formels de la Logique peuvent servir de règle ou de type à un mode de raisonnement. Tels sont. non seulement le principe du syllogisme, mais le principe de simplification, le principe de composition, le principe de contraposition, le principe d'importation et d'exportation et les formules du raisonnement hypothétique (*modus ponens*, *modus tollens*) qui, on l'a vu, en dérivent. Il n'y a pas d'autre mode de démonstration valable en Mathématique que ceux qui sont valables en Logique [2]. Tout autre procédé de raisonnement est aujourd'hui considéré comme illégitime, au moins comme moyen de démonstration, et ne peut servir tout au plus que de moyen d'invention [3].

1. Descartes et Leibniz ont prétendu donner des méthodes d'invention, c'est-à-dire des procédés réguliers et sûrs pour trouver des vérités nouvelles. Mais ces méthodes, qui visaient toujours à résoudre des problèmes définis et déterminés, se réduisaient, au fond, à l'Algèbre et à la Logistique, c'est-à-dire à la Logique démonstrative que nous exposons ici.

2. On verra plus loin ce qu'il faut penser du *principe d'induction complète*, considéré comme le type du raisonnement mathématique.

3. Si c'est ainsi qu'on entend distinguer la Logique de l'invention de la Logique démonstrative, nous n'avons rien à y redire. De tout temps l'intuition et même l'expérience ont servi à découvrir des vérités mathématiques (exemple, la quadrature de la parabole découverte par Archimède au moyen de la balance); mais jamais ces procédés empiriques n'ont passé pour des démonstrations mathématiques, ni n'en ont tenu lieu. Cf. M. Bôcher, *The fundamental conceptions and methods of mathematics* (§ VIII : Éléments non déductifs en mathématiques), ap. *Bulletin of the American Mathematical Society*, t. XI, p. 115-135 (déc. 1904).

En revanche, il y a certains modes de raisonnement que des mathématiciens ingénieux et subtils ont employés, et qu'ignorait la Logique classique. Tel est, par exemple, le mode de raisonnement employé par EUCLIDE (livre IX, prop. 12) et par d'autres mathématiciens, qu'on peut traduire par la formule suivante :

$$-p \supset p . \supset . p$$

« Si la négative d'une proposition implique cette proposition même, celle-ci est vraie [1] ». C'est là un mode de raisonnement tout à fait paradoxal, que seule la Logistique explique et justifie [2].

Définir une notion, c'est la réduire à une combinaison logique d'autres notions, supposées connues. Au point de vue formel, une définition consiste dans une égalité logique établie entre un terme simple (le *défini*) et un terme complexe (le *définissant*). Cette égalité n'est pas *affirmée* comme proposition, elle n'est ni vraie ni fausse; elle est *posée* comme convention d'écriture et de langage. Et comme le défini n'a, par hypothèse, pas d'autre sens que le définissant, il peut être considéré comme un simple *nom* donné au définissant pour en abréger l'énoncé. C'est en ce sens qu'on peut dire que toute définition mathématique est nominale; cela signifie, non pas que les concepts mathématiques se réduisent à des *noms* (ce qui est la thèse nominaliste), mais qu'ils peuvent tous se définir d'une manière logique et explicite « en fonction » de quelques notions premières, et par suite être considérés comme des *noms* imposés à telles et telles combinaisons de ces notions. L'égalité logique du défini et du définissant permet de les substituer partout l'un à l'autre, soit que, pour « expliquer » le défini, c'est-à-dire en développer et en expliciter le contenu

1. G. VAILATI, *Di un'opera dimenticata del P. Girolamo Saccheri* (*Logica demonstrativa*, 1697), ap. *Rivista filosofica*, sept.-oct. 1903; *Sur une classe de raisonnements par l'absurde*, ap. *Revue de Métaphysique*, nov. 1904.

2. En effet, l'implication $-p \supset p$ équivaut à l'alternative $p \cup p$, c'est-à-dire simplement à p. D'ailleurs, puisque le faux implique le vrai, et non inversement, $-p$ ne peut être que fausse, et p vraie.

et pour en démontrer les propriétés, on lui substitue le définissant; soit, au contraire, que pour s'élever à des notions ou propositions plus complexes on éprouve le besoin de condenser l'expression du définissant, auquel cas on lui substitue le défini. Tel est le fondement de cette grande règle de la méthode mathématique, qu'on peut et qu'on doit substituer le définissant au défini, et réciproquement.

Par la définition et la démonstration, on réduit toutes les notions d'une théorie mathématique à quelques notions *indéfinissables*, et toutes ses propositions à quelques propositions *indémontrables*. Il ne faut attacher aucun sens absolu à ces épithètes d'indéfinissable et d'indémontrable : une notion n'est indéfinissable, une proposition n'est indémontrable que par rapport à un certain système de définitions et à un certain ordre de démonstrations; dans un autre système ou dans un autre ordre, les mêmes notions pourront être définies, et les mêmes propositions pourront être démontrées. Il ne faut donc pas non plus attribuer un sens absolu (épistémologique) aux expressions équivalentes de « notion première » et de « proposition première ».

Au point de vue formel, comme les notions premières ne sont pas définies, leur sens n'est pas déterminé, et n'intervient nullement dans l'enchaînement déductif des propositions, car celui-ci dépend uniquement des propositions premières et des définitions explicitement formulées. On peut donc considérer les notions premières comme de purs symboles, dont le sens est indéterminé et indifférent, et qui sont seulement assujettis à vérifier les propositions premières. On conçoit donc qu'une même théorie déductive formelle puisse recevoir plusieurs applications matériellement différentes, si l'on peut trouver pour l'ensemble des symboles non définis plusieurs interprétations qui vérifient également l'ensemble des propositions non démontrées. Cette possibilité de trouver diverses *interprétations* pour une seule et même théorie déductive n'est pas seulement « économique » dans les applications scientifiques (puisqu'elle dispense de refaire les mêmes déductions pour

plusieurs ordres d'objets [1]), mais elle est précieuse au point de vue logique, car, comme on va le voir, elle permet de découvrir et de démontrer certaines propriétés *formelles* de la théorie considérée.

Il y a évidemment avantage à ce que, dans une théorie déductive, l'ensemble des propositions premières soit *irréductible*, c'est-à-dire à ce qu'aucune d'elles ne puisse se déduire des autres; autrement il y aurait une sorte de pléonasme ou de superfluité dans le système des propositions premières, puisqu'on pourrait en supprimer une et la reléguer au rang de théorème. Or, si une proposition première est *dépendante* des autres, sa négative sera logiquement incompatible avec celles-ci (c'est même un moyen fréquemment employé pour démontrer cette dépendance). Donc, si l'on peut montrer que la négative d'une proposition première est compatible avec toutes les autres, on aura établi que cette proposition est indépendante des autres. Ainsi se justifie la règle suivante pour vérifier l'irréductibilité d'un système de propositions :

Pour qu'un système de propositions soit irréductible, il faut et il suffit que, pour chacune d'elles, on puisse trouver une interprétation des symboles non définis qui vérifie toutes les autres, mais non celle-là.

C'est par cette méthode que les mathématiciens vérifient l'irréductibilité d'un système d'axiomes ou de postulats; nous en verrons de nombreux exemples dans la suite de cet ouvrage.

D'autre part, il y a un intérêt manifeste à ce que l'ensemble des symboles non définis soit, lui aussi, irréductible, c'est-à-dire qu'aucun d'eux ne puisse se définir au moyen des autres. Or, si l'un d'eux pouvait se définir au moyen des autres, son sens serait déterminé dès qu'on aurait fixé le sens de tous les autres, et par suite on ne pourrait le changer qu'en changeant l'interprétation de ceux-ci [2]. Donc, réciproquement, si l'on peut

1. On sait que c'est le cas pour beaucoup de théories mathématiques de la Physique.

2. Bien entendu, cela implique que l'ensemble des symboles est soumis

changer le sens d'un seul symbole sans changer l'interprétation des autres, ce symbole sera indépendant des autres. Ainsi se justifie la règle suivante pour vérifier l'irréductibilité d'un ensemble de symboles non définis :

Pour qu'un système de symboles non définis soit irréductible (par rapport à un système de propositions premières), il faut et il suffit que, pour chaque symbole non défini, on puisse trouver une interprétation du système qui vérifie le système des propositions premières, et qui continue à le vérifier quand on y change le sens du seul symbole considéré [1].

Toute définition s'effectue au moyen de termes généraux, au moins virtuellement et en principe, de sorte que le défini est toujours un terme général, une classe. Or, pour pouvoir ensuite raisonner sur cette classe et en invoquer les propriétés, il faut pouvoir affirmer qu'il existe des individus de cette classe, c'est-à-dire que cette classe n'est pas nulle (que les conditions qui la définissent ne sont pas absurdes, c'est-à-dire logiquement incompatibles). C'est pourquoi toute définition doit être accompagnée d'un *théorème d'existence* (ou d'un postulat d'existence) qui affirme l'existence de l'objet défini. D'autre part, il arrive souvent que ce qu'on veut définir n'est pas une classe, mais un individu. Pour pouvoir parler plus tard de cet individu (en mettant l'article défini devant le concept en question), il faut préalablement avoir démontré que la classe définie, non seulement existe, mais est singulière (ne contient qu'un individu); c'est ce qu'on fait, généralement, en prouvant que, si deux individus vérifient la définition, ils sont identiques [2]. On dit alors qu'on a établi l'*existence* et l'*unicité* de l'objet défini.

Une définition n'est pas, à proprement parler, une proposi-

à un ensemble de propositions premières qu'ils vérifient, et qui par suite établissent des relations entre leurs sens, c'est-à-dire entre les notions qu'ils représentent.

1. A. Padoa, *Essai d'une théorie algébrique des nombres entiers, précédé d'une introduction logique à une théorie déductive quelconque*, ap. *Bibliothèque du 1er Congrès de Philosophie*, t. III (Paris, A. Colin, 1901).

2. Cf. la définition de la classe singulière (p. 26).

tion ; car elle n'est ni vraie ni fausse. C'est une convention de langage (ou d'écriture), une imposition de nom qu'on ne peut discuter qu'au point de vue de l'usage ou de la commodité. Une définition ne doit donc pas être considérée comme un *principe*, ni comme une source de *vérité*. — A cela on a objecté qu'une définition peut être une source de vérité, en tant qu'elle exprime la construction d'un concept ; elle résulte d'une combinaison intellectuelle, d'une *synthèse* originale ; elle enveloppe donc un jugement synthétique, qui affirme la légitimité du concept construit[1]. — Il y a là une confusion que les explications précédentes permettent de dissiper. La construction d'un concept n'est pas, par elle-même, un jugement, et ne peut donc pas être, directement, une source de vérité ; et en effet, comme le remarquait Leibniz, si le concept est contradictoire, on pourra démontrer à son sujet des propositions contradictoires. Il faut d'abord pouvoir affirmer l'existence logique du concept défini ; c'est cette affirmation, et non la définition, qui sera source de vérité. Ce n'est donc jamais la définition qui est responsable de ses conséquences (si même l'on peut dire qu'elle ait des conséquences), mais bien le jugement d'existence qui l'accompagne et qui la justifie [2].

Les définitions dont nous avons parlé jusqu'ici sont les définitions nominales ou mieux *explicites*. On emploie souvent en Mathématique des modes de définition qu'on pourrait appeler *implicites*, parce que la notion à définir, au lieu d'être dégagée et isolée dans un membre d'une égalité logique, se trouve impliquée dans des combinaisons d'idées. L'un de ces modes est ce qu'on a appelé la *définition par postulats*. Il consiste à définir un ensemble de notions (qu'on ne peut pas définir séparément) en énonçant un ensemble de postulats qu'elles vérifient. Mais c'est précisément le cas de toutes les

1. G. Lechalas, ap. *Annales de philosophie chrétienne*, 3e série, t. VI, p. 9 (avril 1905).

2. Aux philosophes (particulièrement aux Kantiens) qui seraient tentés de considérer les définitions comme des jugements synthétiques pouvant servir de principes, nous recommanderons la remarque frappante de M. Frege, citée p. 41, note 1.

notions indéfinissables : et il y a quelque contradiction, au moins verbale, à dire qu'on les *définit* par les postulats. Ce n'est pas là une vraie définition, puisque cela suppose l'absence d'une définition (formelle et explicite). Ce qu'il faut dire, c'est qu'un ensemble de postulats *détermine* le sens des symboles non définis qui y figurent. Et encore, il ne le détermine que dans une certaine mesure : car, nous l'avons déjà dit, un même système de postulats peut être vérifié par plusieurs interprétations assignées aux symboles non définis. Il en est de la Logique comme de l'Algèbre : un système de postulats est analogue à un système d'équations entre plusieurs inconnues; il peut déterminer la valeur de ces inconnues, et encore, d'une manière équivoque, s'il admet plusieurs solutions (voire une infinité); mais il peut aussi les laisser plus ou moins indéterminées. Pour savoir si vraiment il détermine les inconnues, c'est-à-dire le sens des symboles non définis, il faudrait pouvoir le *résoudre* par rapport à ces symboles, c'est-à-dire en extraire leur valeur ou leur expression en fonction des termes connus : mais alors on aurait la définition explicite de chacun d'eux. Ainsi une définition par postulats ne peut être considérée que comme provisoire, et doit être finalement remplacée par un ensemble de définitions explicites; elle constitue un problème dont celles-ci forment la solution [1].

Dans le cas où un ensemble de postulats ne contient qu'une seule notion première, il est facile d'en extraire la définition explicite de celle-ci : il suffit de dire que cette notion est telle qu'elle vérifie cet ensemble de postulats (ce qui s'énonce formellement au moyen du symbole ∋) [2]. Mais il faut ensuite

1. Ainsi s'explique qu'on ait pu dire de certains axiomes qu'ils sont des définitions déguisées ou des parties de définitions. Mais il ne faut jamais oublier la distinction absolue des définitions et des principes. Citons à ce propos une remarque de M. G. Frege : Si les axiomes pouvaient rentrer dans les définitions, l'argument ontologique serait justifié : on pourrait dire que Dieu existe par définition (*Ueber die Grundlagen der Geometrie*, ap. *Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung*, t. XII, p. 371; 1903).

2. C'est, nous le verrons, ce qui a lieu pour la définition de la *grandeur*.

démontrer l'existence et l'unicité de cette notion, comme pour toute autre définition explicite.

Une autre espèce de définition implicite est la *définition par abstraction*. Elle s'applique toujours à une fonction (mathématique ou logique), et consiste à dire dans quels cas cette fonction est égale à elle-même (pour des valeurs différentes de la variable), c'est-à-dire à quelle condition on a l'égalité formelle :

$$\varphi x = \varphi y$$

φ étant la fonction à définir. La notion de la fonction φ se dégage en quelque sorte *par abstraction* de la considération des divers cas qui correspondent à une même valeur. Ce procédé de définition est très fréquemment employé en Mathématique : toutes les fois, par exemple, que, pour définir une espèce de grandeurs, on indique les conditions d'égalité de deux grandeurs de cette espèce [1]. Mais une telle définition est évidemment fort imparfaite, et doit être remplacée, autant que possible, par une définition explicite. Or la Logique des relations fournit le moyen de transformer une définition par abstraction en une définition explicite. Une définition par abstraction a la forme suivante :

$$x, y \,\varepsilon\, a \,.\, \supset : \varphi x = \varphi y \,.\, =_{x,y} .\, x R y$$

« Quels que soient les individus x, y d'une certaine classe a, l'égalité $\varphi x = \varphi y$ équivaut à une certaine relation R entre x et y. »

Or la relation R est symétrique et transitive par hypothèse, sans quoi elle ne pourrait pas servir à définir une égalité (qui jouit des mêmes propriétés formelles). Donc, en vertu du *principe d'abstraction*, il existe une relation uniforme S entre chacun des individus x, y et un même terme z, de telle sorte que :

$$x R y \,.\, = .\, x S z \,.\, y S z$$

1. Voir C. Burali-Forti, *Sur l'égalité et sur l'introduction des éléments dérivés dans la science*, ap. *L'Enseignement mathématique*, t. I, p. 246-261 (1899).

C'est ce terme z qui est désigné par φx, φy, etc., et qui est la « propriété commune » à x, y, etc. On peut le définir comme le conséquent de la relation S, et définir la fonction φ au moyen de la relation S. Ainsi les *définitions par abstraction* proviennent simplement d'une insuffisante analyse logique, et disparaissent devant la Logique des relations.

En résumé, les seules définitions véritables sont les définitions nominales et explicites; les définitions implicites ne sont que provisoires, et doivent se ramener à celles-là.

CHAPITRE II

L'IDÉE DE NOMBRE

C'est devenu aujourd'hui un lieu commun, parmi les mathématiciens, de soutenir que l'Analyse peut être constituée uniquement et entièrement avec la seule idée de nombre, et même de nombre entier. Telle est, semble-t-il, la conclusion philosophique de tout ce travail de reconstruction de la science qui s'est effectué depuis trente ou quarante ans sous l'influence de Weierstrass et de son école. Qu'un tel travail ait été utile, et même nécessaire, pour donner aux fondements de l'Analyse la rigueur et la clarté absolues qui leur faisaient défaut, personne ne songe à le contester; ce serait d'ailleurs, de la part des logiciens, une véritable ingratitude, car c'est cette refonte de la Mathématique pure qui a permis de découvrir qu'elle repose sur des principes logiques, et non sur l'intuition. Seulement il faut se défier de tout exclusivisme : or, en ramenant toute la Mathématique pure à l'unique donnée du nombre, on restreint arbitrairement la portée de la méthode mathématique. En outre, on méconnaît l'existence de théories d'un caractère mathématique indéniable, qui ne reposent nullement sur l'idée de nombre. Sans parler de la théorie des ensembles, qui relève de la Logique au moins autant que des Mathématiques, mais qui, en tout cas, est devenue la base indispensable de la théorie des fonctions, la théorie des substitutions et des groupes constitue un corps de doctrine où le nombre ne joue qu'un rôle accessoire, et dont l'objet essentiel est l'idée d'ordre[1]. Il

1. Voir les Notes I et II, à la fin du volume.

faut donc admettre au moins ces deux idées, celle de nombre et celle d'ordre, comme objets de la Mathématique pure, et cela, sans prétendre aucunement borner son domaine à ces deux objets. Quoi qu'il en soit, nous avons d'abord à définir ces deux idées en termes de Logique, ou plus exactement, en fonction des constantes logiques que nous connaissons déjà.

On sait que l'idée de nombre se présente sous une double forme, le nombre cardinal et le nombre ordinal; certains mathématiciens ont cru pouvoir soutenir que, de ces deux formes, c'est le nombre ordinal qui est antérieur à l'autre, qu'il est même le seul primitif et *a priori*. Telle n'est pas l'opinion de M. Russell, ni la nôtre, et nous en donnerons bientôt les raisons. Dans tous les cas, il y a un intérêt philosophique manifeste à séparer, si possible, l'idée de nombre de l'idée d'ordre, et par suite à définir le nombre cardinal avant le nombre ordinal, et indépendamment de lui.

Il y a plus : les nombres cardinaux eux-mêmes peuvent être présentés et définis de deux manières différentes : on peut les concevoir comme indépendants et isolés les uns des autres, ou les construire successivement par l'addition répétée de l'unité à elle-même; dans ce dernier cas, ils forment ce qu'on appelle la *suite naturelle des nombres*. Nous désignerons la première conception sous le nom de théorie *cardinale*, par opposition à la seconde, qui mérite le nom de théorie *ordinale*. Et, toujours pour la même raison, nous exposerons la théorie cardinale avant la théorie ordinale; on verra d'ailleurs que ces deux théories, loin de se remplacer ou de se contrarier, se complètent l'une l'autre : la seconde repose sur la première, ce qui confirmera notre thèse de l'indépendance de l'idée de nombre (cardinal) par rapport à l'idée d'ordre.

§ A. — Théorie cardinale.

Beaucoup de philosophes croient pouvoir définir le nombre cardinal par l'opération du dénombrement. Il est aisé de voir qu'ils commettent un cercle vicieux. En effet, qu'est-ce que

dénombrer une collection d'objets? C'est faire correspondre ces objets, un à un, aux nombres entiers successifs (considérés alors comme de simples numéros d'ordre) depuis 1 jusqu'à *n*. On dit alors que le nombre des objets comptés est *n*. Pourquoi? Parce que *n* est le *nombre cardinal* des nombres entiers consécutifs depuis 1 jusqu'à *n* inclusivement. Mais cela suppose, d'abord, la notion de nombre cardinal, ensuite, l'ordre assigné à la « suite naturelle des nombres ». Ainsi tout essai de définition de ce genre implique la notion à définir, et, qui plus est, la complique inutilement en lui associant une idée d'ordre [1]. A plus forte raison sont vaines toutes les théories psychologiques qui invoquent de vagues « synthèses » mentales, et qui consistent en définitive à dire, par exemple, que la notion de *dix* est engendrée par dix actes d'attention successifs; le cercle vicieux est encore plus flagrant. Il ne faut donc pas faire dépendre l'idée de nombre de l'acte du dénombrement, non seulement parce qu'il la présuppose, mais encore parce que le dénombrement suppose qu'une classe peut être « bien ordonnée », ce qui n'est peut-être pas vrai de toute classe; et enfin parce que le dénombrement ne donne un résultat que pour les classes finies, alors qu'il y a des classes infinies, et par suite des nombres cardinaux infinis [2].

Ces considérations mettent toutefois sur la voie de la définition logique du nombre cardinal. Et d'abord, il importe de remarquer que le nombre cardinal est la propriété d'une classe considérée comme un tout, comme un objet, et non pas des objets individuels qui la composent. Quand on dit des apôtres qu'ils sont *douze*, on ne peut pas en conclure que chacun des apôtres pris individuellement est *douze* [3]. C'est là un truisme, mais il est de grande conséquence, comme on le verra [4]. On est ainsi amené à rechercher quelle est cette propriété d'une

1. Russell, *The Principles of Mathematics*, § 129. Cf. notre ouvrage *De l'Infini mathématique*, 2e partie, livre I, chap. II.
2. Russell, *op. cit.*, p. 114.
3. Peano, *Revue de Mathématiques*, t. VI, p. 97.
4. C'est la distinction que les Scolastiques faisaient déjà entre le sens *distributif* et le sens *collectif* d'un concept.

classe qui fait qu'elle a tel nombre, et par suite dans quel cas ou dans quelles conditions deux classes auront le même nombre, c'est-à-dire à définir le nombre cardinal *par abstraction*.

Deux classes ont le même nombre, lorsqu'on peut établir entre leurs éléments une correspondance univoque et réciproque, autrement dit, une *relation biuniforme*, ou, comme nous dirons pour abréger, lorsqu'elles sont *équivalentes*[1]. Cette définition est, comme on voit, purement logique. Il ne faut pas croire qu'elle implique l'idée du nombre *un*[2]: en effet, la relation biuniforme se définit uniquement au moyen de la relation d'identité entre individus[3]. Seulement cette définition a besoin d'une légère modification pour embrasser le cas de la classe nulle : car, toute relation supposant des termes, on ne sait pas ce qu'est une relation biuniforme entre deux classes nulles. On dira donc : « Deux classes *a* et *b* ont le même nombre, lorsqu'il existe une relation biuniforme dont le domaine comprend *a*, et telle que la classe des corrélatifs des termes de *a* soit identique à *b* ». Cette définition équivaut à la précédente, si les classes ne sont pas nulles ; et si elles sont nulles, chacune d'elles est contenue dans le domaine (et dans le codomaine) d'une relation biuniforme quelconque, de sorte qu'elles sont corrélatives. Il en résulte que deux classes nulles ont le même nombre, qu'on appellera 0 (*zéro*). Ainsi le zéro arithmétique se trouve défini au moyen du zéro logique.

De même, deux classes singulières ont le même nombre, qu'on appellera 1 (*un*). Encore une fois, il ne faut pas croire que cette définition du *nombre un* constitue un cercle vicieux, car la définition de la classe singulière repose uniquement sur la relation d'identité[4]. D'ailleurs, s'il est vrai qu'elle implique en un sens l'*unité* ou plutôt l'*individualité* de l'élément consi-

1. Le mot correspondant en anglais est *similar*; mais il ne faut pas le traduire par *semblable*, qui correspond à *like*. Le mot correspondant en allemand est *gleichzahlig*; par sa composition, il semble impliquer un cercle vicieux, mais il ne l'implique pas en réalité. Cf. Frege, *Grundlagen der Arithmetik*, § 68 (1884).

2. Comme nous l'avons soutenu (*De l'Infini mathématique*, loc. cit.).

3. Voir p. 32.

4. Voir p. 26.

déré, cette unité ne peut être identique au *nombre un* qu'il s'agit de définir : car cette unité est une propriété de chaque élément, tandis que le *nombre un* est la propriété d'une classe. La différence de ces deux idées apparaît encore mieux quand on a à considérer une classe comme élément d'une autre classe; car alors *la même* classe a, comme *classe*, un nombre cardinal (qui peut être 1 ou un autre nombre), et, comme *élément*, l'espèce d'unité que possède tout élément. Si ces deux idées n'étaient pas distinctes, toutes les classes auraient le nombre 1 (en tant qu'éléments possibles), ou bien on ne pourrait pas concevoir des classes de classes, c'est-à-dire considérer à son tour une classe comme un élément (comme une « unité »). Donc, dans tous les cas, les *unités* qui constituent un nombre cardinal sont différentes du *nombre un*.

Cette définition par abstraction est parfaitement logique; mais elle possède un grave défaut, commun à toutes les définitions par abstraction : elle ne montre pas l'existence et l'unicité de l'objet défini. En effet, elle définit le nombre cardinal comme la propriété commune aux classes *équivalentes*. Or rien n'assure, d'une part, que ces classes ont une propriété commune, et, d'autre part, qu'elles n'ont qu'une propriété commune. Tout ce qu'on peut dire, c'est que la définition permet de répartir toutes les classes possibles en classes de classes caractérisées par le fait que toutes les classes d'*une* classe « ont le même nombre », cette expression signifiant simplement qu'elles sont équivalentes. En effet, la relation d'équivalence est symétrique et transitive : si deux classes A et B sont équivalentes à une même classe C, elles sont équivalentes entre elles. Par suite, et plus généralement, si deux classes A et B sont équivalentes, les concepts « classe équivalente à A » et « classe équivalente à B » auront la même extension, c'est-à-dire détermineront la même classe de classes [1]. On a ainsi les deux propositions réciproques suivantes : Deux classes de la même classe ont le même nombre; deux classes qui ont le même nombre appartiennent à la même

1. Frege, *op. cit.*, § 73.

classe (d'où, par contraposition : deux classes appartenant à des classes différentes ont des nombres différents). Il y a donc une correspondance biuniforme entre les nombres cardinaux et les classes de classes. Mais alors, il existe tout au moins une entité, et une entité unique qui correspond à chaque nombre cardinal : et c'est précisément la classe des classes qui sont dites avoir ce nombre. On peut donc considérer cette classe de classes comme représentant le nombre cardinal correspondant.

C'est d'ailleurs la conclusion à laquelle on est conduit par le *principe d'abstraction*, qui n'est pas un axiome ou un postulat, mais un théorème de la Logique des relations, énoncé et démontré par M. Russell[1]. On établit d'abord que, si S est une relation uniforme, la relation $R = S * {}^cS$ est symétrique et transitive[2]. Le *principe d'abstraction* est la réciproque de ce théorème : Si R est une relation symétrique et transitive[3], il existe une relation uniforme S telle que $R = S * {}^cS$. Autrement dit, s'il existe entre deux objets quelconques d'une certaine classe une relation symétrique et transitive, cette relation peut être ramenée à une même relation uniforme que ces objets ont avec un même terme. Ce principe est d'une application très fréquente en Mathématique, toutes les fois qu'on emploie une définition *par abstraction*. Il a pour effet de ramener toute relation symétrique et transitive à une espèce d'égalité (c'est-à-dire d'identité). L'égalité[4] est elle-même une relation symétrique et transitive; c'est pourquoi on peut y ramener et on y ramène en effet toutes les relations de la même forme. Par exemple, deux vecteurs parallèles, de même longueur et de même sens, sont dits *équipollents* (Bellavitis); l'équipollence est une espèce d'égalité. De même, deux segments (deux surfaces, deux solides) congruents sont dits *égaux* (en grandeur) et

1. *Op. cit.*, p. 166, 220; *Sur la Logique des relations*, P. 6. 2.

2. Rappelons que, par définition, la relation $S * {}^cS$ est celle qui existe entre x et y, dès qu'on a : xSz et ySz $(= z{}^cSy)$.

3. Non nulle, c'est-à-dire existant entre quelques termes.

4. Logique ou mathématique, c'est tout un, car, comme M. Frege l'a excellemment montré, l'égalité mathématique n'est pas autre chose que l'égalité logique, c'est-à-dire l'identité (*op. cit.*, § 65).

considérés comme ayant la même longueur (la même aire, le même volume). De même en Géométrie projective : deux droites *parallèles* (relation symétrique et transitive) sont dites avoir la même direction, ou encore avoir en commun un point à l'infini. De même en Physique : deux corps qui se font équilibre dans une balance sont dits avoir le même poids ; deux corps en équilibre thermique sont dits avoir la même température ; deux corps en équilibre électrique sont dits être au même potentiel ; et ainsi de suite. On voit en quoi consiste dans chaque cas l'*abstraction* : toute relation symétrique et transitive entre des objets d'une certaine espèce peut servir à les répartir en classes telles que cette relation existe entre deux éléments quelconques d'une même classe, et n'existe pas entre deux éléments quelconques de classes différentes. On dit vulgairement que les éléments d'une même classe ont une propriété commune, c'est-à-dire un attribut qui est le même pour tous, et qui caractérise la classe. Mais, quel que soit cet attribut, et qu'il existe ou non, le fait seul d'appartenir à la même classe constitue une propriété identique de tous ses éléments, qui suffit à les caractériser, de sorte que la classe elle-même peut être considérée comme l'attribut commun de ses membres ; elle le représente et peut au besoin en tenir lieu [1].

Si l'on applique le *principe d'abstraction* aux classes *équivalentes*, on pourra et devra définir le nombre cardinal comme une classe de classes équivalentes : autant il y aura de classes de classes équivalentes, autant il y aura de nombres cardinaux. Au premier abord, cette définition choque le sens commun : un nombre cardinal n'est pas, semble-t-il, une classe de classes équivalentes, mais la propriété commune à ces classes. Mais d'abord, en Logistique, une classe quelconque représente la « propriété commune » à tous ses éléments. En effet, chaque concept figure dans le calcul logique par son extension, qui est une classe ; et inversement, chaque classe correspond (ou peut correspondre) à un concept qui est l'attribut commun de ses

1. Le principe d'abstraction n'a donc pas pour résultat d'effectuer l'abstraction, mais au contraire d'en dispenser et de la remplacer.

éléments. Par exemple, le terme *homme* (soit h) ne représente pas dans le calcul logique l'attribut de l'*humanité*, mais la classe des hommes [1]. Lorsqu'on dit : $x \varepsilon h$ (x est un homme), cela signifie exactement, non pas que x possède la qualité d'être homme, mais que x fait partie, comme individu, de la classe *homme* (ce qui est équivalent). Il n'est certes pas interdit de penser en compréhension les concepts et leurs relations, mais ils n'entrent dans les formules que par leur extension, et ce sont leurs relations d'extension qui servent de base au calcul logique. On comprend donc qu'un nombre cardinal ne soit représenté dans ce calcul, comme tous les autres concepts, que par son extension, c'est-à-dire par la classe des classes qui possèdent ce nombre cardinal. D'ailleurs, cette manière de voir n'est pas si contraire qu'on le croit au sens commun et même à l'usage. Le nombre *deux*, c'est l'idée de *couple* ; le nombre *trois*, c'est l'idée de *trio*, et ainsi de suite. Or qu'est-ce que *couple*, *trio*, etc., sinon des noms communs de certaines espèces de classes? Ne dit-on pas, même couramment : « *un* cent, *un* mille », comme si *cent*, *mille* étaient des noms génériques d'objets? En tout cas, cette manière de considérer les nombres cardinaux est la plus simple et la plus commode pour les faire entrer dans le calcul logique [2]; et cela se comprend, puisque, comme nous venons de l'expliquer, les concepts n'y figurent que par leur extension. On est obligé d'y employer une tournure dont voici un exemple familier :

$$\text{apôtre } \varepsilon \ 12,$$

c'est-à-dire : la classe des apôtres est une des classes qui ont pour nombre 12, ou, comme on dit vulgairement, est une *douzaine* [3]. On voit par là que cette façon de penser, quoique

1. Que l'on appelle aussi l'*humanité*. C'est là un exemple des équivoques dont fourmillent les langues naturelles, et que seule une langue artificielle peut éviter (l'*Esperanto* dit *homeco* dans le premier sens, et *homaro* dans le second).

2. C'est ce dont nous nous sommes convaincu par la lecture du mémoire de M. Whitehead : *On cardinal numbers*, ap. *American Journal of Mathematics*, t. XXIV (1902).

3. On remarquera que cette façon de s'exprimer, loin de prêter à équi-

peu usuelle, n'a rien de paradoxal ni surtout d'illogique [1].

On remarquera que cette définition des nombres cardinaux définit chacun d'eux indépendamment de tous les autres, et ne leur assigne aucun ordre ni aucune relation. C'est seulement lorsqu'on aura défini l'inégalité des nombres, c'est-à-dire la relation *plus grand que* ou *plus petit que*, que l'on pourra les ranger par ordre de grandeur. D'autre part, on ne pourra pas dire que deux nombres sont *égaux* : deux nombres qui ne sont pas différents sont *identiques* ; seules, les collections auxquelles ils correspondent peuvent être dites *égales* (numériquement), précisément parce qu'elles ont *le même* nombre. Quand on parle de « nombres égaux », on considère en réalité *le même* nombre, soit représenté sous des formes diverses (exemple : $7+5$ et 12), soit incarné dans des collections différentes. Ainsi l'égalité mathématique se ramène, en dernière analyse, à l'égalité logique, c'est-à-dire à l'identité d'un concept.

Montrons brièvement qu'on peut définir aussi les opérations arithmétiques sans faire intervenir l'idée d'ordre. L'addition arithmétique se définit au moyen de l'addition logique : la somme arithmétique de deux nombres cardinaux α et β (correspondant à deux classes a et b) est le nombre cardinal de la somme logique des classes a et b, à la condition que ces deux classes soient *disjointes* (n'aient aucun élément commun) [2]. Cette définition s'étend sans difficulté au cas d'un nombre quelconque de classes disjointes, lors même que ce nombre

voque, permet de dissiper les sophismes du genre de celui auquel nous avons fait allusion plus haut; en effet, de « Pierre ε apôtre », et « apôtre ε 12 », on ne peut déduire : « Pierre ε 12 », puisque la copule ε n'est pas transitive. Le sophisme en question n'est possible que par la confusion verbale des deux copules ε et $\supset$ (traduites toutes deux dans le langage par le verbe *être*).

1. Cette théorie, suivant laquelle le nombre cardinal d'une classe u serait l'ensemble des classes équivalentes à u, est en somme celle que M. FREGE a soutenue dès 1884 dans ses *Grundlagen der Arithmetik*. M. RUSSELL y est arrivé d'une manière indépendante (*op. cit.*, p. VI, VIII), en partant des travaux de M. PEANO, ce qui constitue une rencontre fort intéressante.

2. Ce qui se traduit par l'égalité logique : $ab = \Lambda$.

serait infini. Puisque l'addition logique n'implique aucun ordre entre les « sommandes », il en sera de même de l'addition arithmétique : la loi commutative est établie par cette simple remarque, et n'a donc pas besoin de démonstration. La différence même de l'addition logique (pour laquelle $a + a = a$) et de l'addition arithmétique (pour laquelle $\alpha + \alpha = 2\alpha$) montre que celle-ci repose sur celle-là. En effet, si l'on peut ajouter un nombre à lui-même, c'est en l'incarnant dans deux collections différentes (et disjointes) qui ont ce même nombre. Autrement, on aurait beau répéter le nombre α, on n'obtiendrait jamais, en l'ajoutant *logiquement* à lui-même, que le nombre α[1].

Pour la multiplication, que l'on définit d'habitude par rapport à l'addition (comme l'addition de n nombres égaux à m), M. WHITEHEAD en a trouvé une définition purement logique qui est indépendante à la fois de l'idée d'addition et de l'idée d'ordre[2]. Soit k une classe de classes disjointes et non nulles; on appelle *classe multiplicative* des k la classe des classes formées en empruntant un élément, et un seul, à chacune des classes k[3]. Le nombre cardinal de la classe multiplicative est, par définition, le *produit* des nombres cardinaux des classes k. Pour éclaircir et justifier cette définition, supposons que la classe k comprenne deux classes seulement, l'une de m, l'autre de n éléments. La classe multiplicative comprend, comme éléments, toutes les combinaisons possibles d'*un* élément de la 1re et d'*un* élément de la 2e; or on sait que ces combinaisons sont au nombre de mn (car chaque élément de la 2e donne lieu à m combinaisons avec les m éléments de la 1re, donc les n éléments de la 2e donnent lieu à mn combinaisons en tout). Cette défi-

1. Cette remarque a été faite par LEIBNIZ (*Gerh. Phil.*, VII, 230, 237, 246). Cf. *La Logique de Leibniz*, p. 365.

2. *On cardinal numbers*, ap. *American Journal of Mathematics*, t. XXIV (1902).

3. Cela suppose que, étant donnée une classe de classes non nulles, on peut extraire de chacune d'elles un élément pour en composer une classe nouvelle. Or M. RUSSELL nous apprend que cette proposition n'a pas encore reçu de démonstration en Logistique. M. ZERMELO a dû la postuler pour démontrer que tout ensemble peut être bien ordonné (*Math. Annalen*, t. 59).

nition a ceci de remarquable, qu'elle n'implique aucun ordre entre les facteurs (aucune distinction de *multiplicande* et de *multiplicateur*), de sorte que la loi commutative est évidente, et n'a pas besoin de démonstration [1]. En outre, elle s'applique à un nombre quelconque de facteurs, lors même que ce nombre serait infini. Enfin elle s'applique également au cas où un ou plusieurs facteurs, ou même tous, sont des nombres infinis. Elle est donc absolument générale pour tous les nombres *cardinaux* (nombres essentiellement *entiers*). D'ailleurs, toutes les définitions précédentes sont également valables pour les nombres finis et infinis, par cela même qu'elles sont indépendantes de l'idée d'ordre; et jusqu'ici, nous n'avons pas eu l'occasion ni même le moyen de distinguer les nombres finis et les nombres infinis.

§ B. — Théorie ordinale.

Il en va tout autrement dans la théorie ordinale, où l'on considère les nombres entiers comme consécutifs, et où on les définit par leur succession même : cette définition ne vaut que pour les nombres finis, et sert à les distinguer des nombres infinis. Voici comment M. Peano l'expose dans son *Formulaire* [2] : c'est ce qu'on appelle une *définition par postulats*.

On prend *trois* notions indéfinissables, représentées par les symboles 0 (*zéro*), N (*nombre entier*) et « seq » (*le suivant de*). Ces trois notions sont hétérogènes : 0 est un individu, N est une classe, et « seq » est une fonction. On pose en outre cinq axiomes ou *postulats*, qui sont les suivants [3] :

1. D'ailleurs, on déduit de cette définition le théorème suivant : « Soit K une classe de a classes disjointes, dont chacune comprend b éléments; la somme logique des classes K a pour nombre cardinal le produit $a \times b$ (tel qu'il a été défini précédemment) » (Whitehead, *op. cit.*, prop. 7. 3). On retrouve ainsi la définition vulgaire (non symétrique) du produit de deux nombres entiers.

2. Cf. G. Peano, *Arithmetices principia nova methodo exposita* (Turin, Bocca, 1889) ; *Sul concetto di numero*, ap. *Rivista di Matematica*, t. I (1891); *Aritmetica generale e Algebra elementare* (Turin, Paravia, 1902).

3. Dans tout cet ouvrage, les axiomes ou postulats de chaque théorie seront numérotés en chiffres romains.

I. $0 \varepsilon N$

« Zéro est un nombre entier. »

II. $a \varepsilon N . \supset . \operatorname{seq} a -= 0$

« Zéro n'est le suivant d'aucun nombre entier. »

III. $a \varepsilon N . \supset . \operatorname{seq} a \varepsilon N$

« Le suivant d'un entier est un entier. »

IV. $a , b \varepsilon N . \operatorname{seq} a = \operatorname{seq} b . \supset . a = b$

« Deux nombres entiers sont égaux, si leurs suivants le sont. »

V. $s \varepsilon \mathrm{Cls} . 0 \varepsilon s : x \varepsilon N \frown s . \supset_x . \operatorname{seq} x \varepsilon s : \supset . N \supset s$

« Si s est une classe telle qu'elle contient 0, et que, si elle contient un nombre entier x, elle contient aussi le suivant de x, alors elle contient tous les nombres entiers. »

Ce dernier axiome est connu sous le nom de *principe d'induction complète*. Comme le fait de posséder une propriété équivaut, en Logique, au fait d'appartenir à une classe, ce principe s'énonce souvent comme suit : « Si le nombre 0 possède une certaine propriété, et si, dès qu'un nombre entier la possède, le suivant la possède aussi, tous les nombres entiers la possèdent. » Ou bien, le fait de vérifier une proposition équivalant au fait d'appartenir à une classe, on dit encore : « Si une proposition est vraie pour zéro, et si, dès qu'elle est vraie pour n, elle est encore vraie pour $n+1$, elle est vraie pour tous les nombres entiers ».

Il importe de remarquer que l'indépendance mutuelle de ces cinq axiomes a été démontrée par MM. PEANO et PADOA, de sorte qu'ils sont tous nécessaires (étant donné le système des notions premières). Et d'autre part, ils sont suffisants pour fonder toute l'Arithmétique. C'est en ce sens qu'on peut dire qu'ils définissent complètement les nombres entiers *finis*.

On peut simplifier encore les principes de l'Arithmétique [1]. En effet, si le système de postulats proposé par M. PEANO est irréductible, le système des notions premières qui lui corres-

1. PADOA, *Théorie des nombres entiers absolus*, ap. *Revue de Mathématiques*, t. VIII, p. 45-54 (1902).

pond n'est pas irréductible : on peut déduire des postulats l'égalité suivante, qui peut servir de définition à 0 :

$$0 = \imath \left\{ \mathrm{N} \frown x \ni \left[- \exists \mathrm{N} \frown y \ni (\mathrm{seq}\, y = x) \right] \right\}$$

« Zéro est le nombre entier qui ne succède à aucun [1]. » Ainsi l'on peut définir zéro au moyen des deux autres notions premières, « N » et « seq ». Cela a suggéré à M. Padoa un système plus simple, qui ne comporte que *deux* notions premières (« N » et « seq ») et *quatre* propositions premières, que voici :

I. $a \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\, \supset .\, \mathrm{seq}\, a \,\varepsilon\, \mathrm{N}$

« Le suivant d'un nombre est un nombre. »

II. $a\,, b \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\, \mathrm{seq}\, a = \mathrm{seq}\, b \,.\, \supset .\, a = b$

« Deux nombres dont les suivants sont égaux sont égaux. »

III. $\exists \mathrm{N} \frown x \ni \left[- \exists \mathrm{N} \frown y \ni (\mathrm{seq}\, y = x) \right]$

« Il y a (au moins) un nombre qui n'est le suivant d'aucun nombre. »

Pour simplifier l'énoncé du 4e postulat, on pose la définition suivante :

$$\mathrm{N}_1 = x \ni \left[\exists \mathrm{N} \frown y \ni (\mathrm{seq}\, y = x) \right] \qquad \mathrm{Df}$$

« On appellera N_1 la classe des nombres qui sont les suivants de quelque nombre. »

Moyennant cette définition, la formule du 3e postulat se simplifie, et se réduit à :

III. $\exists \mathrm{N} - \mathrm{N}_1$

Cela posé, on peut formuler le 4e postulat comme suit :

IV. $\exists s \frown \mathrm{N} - \mathrm{N}_1 : x \,\varepsilon\, s \,.\, \supset_x .\, \mathrm{seq}\, x \,\varepsilon\, s : \supset .\, \mathrm{N} \supset s$

« Si dans une classe s il y a un nombre qui n'est le suivant d'aucun nombre, et si le suivant de chaque s est un s, tout nombre est un s. »

Telle est la nouvelle forme du principe d'induction. Ces

1. Traduction littérale : « Zéro est le nombre entier x tel qu'il n'y a pas de nombre entier y tel que le suivant de y soit x ». Cette proposition résulte principalement de l'ancien postulat II :

$$a \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\, \supset .\, \mathrm{seq}\, a - = 0$$

« Le suivant d'aucun nombre n'est zéro. »

postulats une fois admis, on peut démontrer qu'il n'y a qu'un seul nombre qui ne soit le suivant d'aucun, c'est-à-dire que si deux nombres possèdent cette propriété, ils sont égaux (identiques) :

$$a, b \,\varepsilon\, \mathrm{N} - \mathrm{N}_1 \,.\, \supset .\, a \equiv b$$

On peut alors appeler *zéro* ce nombre unique, c'est-à-dire poser la définition (avec ɿ) :

$$0 = ɿ\,(\mathrm{N} - \mathrm{N}_1)$$

qui est l'égalité énoncée plus haut, sous une forme différente due à l'introduction du symbole N_1. On peut démontrer dès lors toutes les propriétés de zéro, à commencer par celles-ci :

$$0 \,\varepsilon\, \mathrm{N}, \quad a \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\, \supset .\, \mathrm{seq}\, a - = 0$$

qui faisaient partie des anciens postulats, et déduire ceux-ci des nouveaux postulats, ce qui établit l'équivalence des deux systèmes de postulats.

On peut enfin prouver que le nouveau système de postulats est irréductible, comme l'ancien, et que le nouveau système de notions premières (N, seq) est irréductible par rapport au nouveau système de postulats; ce qui constitue la perfection logique d'un système de principes.

Ce perfectionnement des principes de l'Arithmétique n'a pas, toutefois, une importance aussi capitale qu'on pourrait le croire; il l'aurait, assurément, si l'on n'avait pas d'autre moyen de fonder l'Arithmétique que de l'asseoir sur quelques notions premières et quelques postulats; il ne l'a plus, si l'on peut déduire l'un ou l'autre système de postulats d'une définition explicite du nombre entier, comme l'a montré M. Russell; car alors, ni les notions premières ne sont vraiment indéfinissables, ni les propositions premières ne sont indémontrables, et par suite il n'importe plus autant que leur nombre soit réduit au minimum.

Or cette définition par postulats, suffisante au point de vue mathématique, n'est pas irréprochable au point de vue logique. En effet, comme la définition par abstraction, elle n'assure

ni l'*existence* ni l'*unicité* de l'objet défini (à savoir la suite naturelle des nombres). C'est surtout l'unicité qui ne paraît pas évidente. M. Peano lui-même remarque qu'il n'y aurait rien à changer si l'on remplaçait 0 par 1 : N désignerait alors la suite naturelle des nombres à partir de 1, et non plus à partir de 0. On pourrait de même remplacer 0 par un nombre quelconque; tous les axiomes continueraient à être vérifiés, et par suite toutes les propositions de l'Arithmétique. On aurait donc une infinité de « suites naturelles » indiscernables, et jouissant des mêmes propriétés formelles.

A cela M. Russell répond fort justement : si toutes ces suites naturelles jouissent des mêmes propriétés formelles, elles sont indiscernables et n'en font réellement qu'une; car qu'importe que le premier nombre s'appelle 0 ou 1, du moment que les symboles 0 et 1 sont indéfinissables? La remarque de M. Peano pèche en ce qu'elle suppose le sens *réel* de 0 et de 1, alors que ce sens est postérieur à la définition discutée. Néanmoins, elle subsiste tant qu'on prétend définir les trois notions premières (0, N et seq) au moyen des cinq axiomes. Car il peut y avoir une infinité d'entités différentes qui vérifient ces cinq axiomes, et par suite une infinité de sens possibles pour les trois symboles 0, N et seq. Pour mettre fin à cette ambiguïté, il suffit de définir d'une manière univoque ces trois symboles, et alors tous les nombres de la suite naturelle seront, eux aussi, définis d'une manière univoque. C'est ce que l'on obtient en posant les définitions suivantes :

1° « 0 est le nombre cardinal de la classe *nulle* (définie en Logique) »;

2° « 1 est le nombre cardinal des classes *singulières* (définies en Logique) »;

3° « Le suivant d'un nombre n est le nombre $n+1$, somme arithmétique de n et de 1 » (l'addition arithmétique a été définie en fonction de l'addition logique);

4° « N désigne la classe des nombres entiers *finis*, c'est-à-dire des nombres qui appartiennent à toute classe s qui contient 0, et qui contient $(n+1)$ dès qu'elle contient n. »

Ces définitions fixent, comme on voit, le sens à attribuer aux trois symboles indéfinissables, et cela en termes purement logiques. Dès lors, la définition du nombre entier cesse d'être suspendue à trois notions « premières » indépendantes des constantes logiques; elle se réduit à une définition nominale qui ne contient pas d'autres notions indéfinissables que les constantes logiques. Par là est achevé le rattachement de l'Arithmétique à la Logique, sans adjonction d'aucune notion première nouvelle.

On peut simplifier encore ces définitions[1]. D'abord, si l'on admet la conception de FREGE et de RUSSELL, suivant laquelle un nombre cardinal est une classe de classes, la 1[re] définition pourra s'écrire simplement :

$$0 = \iota\Lambda$$

« Zéro est la classe qui comprend la seule classe nulle[2]. »

La 2[e] définition peut être supprimée, car elle peut se déduire de la 3[e], qui est générale. Celle-ci s'écrira, suivant la même conception :

$$n \varepsilon \mathrm{N} \,.\, \supset .\, n+1 = \mathrm{Cls} \frown u \ni (u -= \Lambda : x \varepsilon u \,.\, \supset_x .\, u - \iota x \varepsilon n).$$

« n étant un nombre entier fini, $n+1$ est la classe des classes u telles que, si x est un élément d'une classe u (non nulle), la classe des u non égaux à x a le nombre n ». C'est une définition *par récurrence* de tous les nombres entiers finis : elle revient à dire qu'une classe a le nombre $n+1$, quand cette classe, diminuée de l'élément x qu'elle contient, a le nombre n. Elle équivaut à la définition progressive de $(n+1)$ comme somme arithmétique de n et de 1.

Si l'on applique cette définition au nombre 1, en faisant $n = 0$, on obtient la formule :

$$1 = \mathrm{Cls} \frown u \ni (u -= \Lambda : x \varepsilon u \,.\, \supset_x .\, u - \iota x \varepsilon 0).$$

1. WHITEHEAD, *mémoire cité*, Section III (due à M. RUSSELL).
2. Nous avons parlé précédemment des *classes nulles* au pluriel, et dit qu'elles sont égales. Or des classes égales sont identiques. Rigoureusement, nous aurions dû dire qu'il n'y a qu'une classe nulle, mais qu'elle peut être l'extension de plusieurs concepts différents en compréhension.

Or :

$$u - \iota x \varepsilon 0 . = . u - \iota x = \Lambda . = . u \supset \iota x$$

$$u \supset \iota x . = : y \varepsilon u . \supset_y . y = x$$

$$x \varepsilon u . \supset_x : y \varepsilon u . \supset_y . y = x : . = : x \varepsilon u . y \varepsilon u . \supset_{x,y} . y = x$$

La définition de 1 devient donc finalement :

$$1 = \mathrm{Cls} \frown u \ni (u - = \Lambda : x \varepsilon u . y \varepsilon u . \supset_{x, y.} . y = x).$$

« 1 est la classe (le nombre cardinal) des classes u (non nulles) telles que, si x et y sont des éléments de u, ils sont nécessairement identiques. »

On retrouve ainsi la définition logique du nombre 1 que nous avons donnée dans le Chapitre I (p. 26), déduite de la définition générale de $(n + 1)$ en fonction de n. Il en résulte que 1 est le suivant de 0 dans la suite naturelle. On définirait de même 2 comme $(1 + 1)$ ou suivant de 1 ; 3 comme $(2 + 1)$ ou suivant de 2 ; et ainsi de suite.

On remarquera, en passant, l'avantage de la conception Frege-Russell au point de vue du calcul logique. Au lieu d'avoir à introduire une fonction nouvelle « Num » (*nombre cardinal des*) comme fait M. Peano[1], on exprime simplement la relation d'une classe à son nombre cardinal au moyen du signe général de l'appartenance d'un individu à une classe (ε).

Une fois ces définitions posées, on peut démontrer *logiquement* (sans aucun recours à l'intuition) toutes les propriétés des nombres entiers finis, et notamment les cinq postulats de Peano, ou les quatre de Padoa, d'où ces propriétés se déduisent. En particulier, la loi d'induction est contenue dans la définition même du nombre entier fini (4e définition), et en résulte immédiatement[2]. On démontre par exemple que zéro

1. Peano, *Sul concetto di numero*, ap. *Revue de Mathématiques*, t. I, p. 258 (1891); *Formulaire de Mathématiques*, 1903, §§ 20 et 56.

2. M. Dedekind (*Was sind und was sollen die Zahlen*, 1887) a cru démontrer la loi d'induction, mais en admettant que les nombres forment une *chaîne*, c'est-à-dire une suite douée des propriétés de la suite naturelle (c'est ce que nous appellerons plus loin, avec M. Russell, une *progression*). M. J. Keyser a montré que cette assomption est une pétition de principe (*Concerning the axiom of infinity and mathematical induction*, ap. *Bulletin of the American Mathematical Society*, t. IX, p. 424, 1903). Il semble

ne peut être le suivant d'aucun nombre entier (d'où l'on conclut que la suite naturelle n'est pas périodique ou fermée); que le suivant d'un nombre est toujours différent de ce nombre (d'où l'on conclut que la suite naturelle est illimitée ou sans fin); que le nombre des nombres entiers de 0 à n est le suivant de n, c'est-à-dire $(n+1)$, d'où il résulte que n est le nombre cardinal des nombres entiers de 1 à n[1].

Les définitions précédentes relient la théorie ordinale du nombre à la théorie cardinale. Ainsi ces deux théories ne se contredisent nullement, et ne font pas non plus double emploi; elles ont des significations bien différentes, et aussi des extensions très inégales. La seconde présuppose la première : celle-ci définit le nombre cardinal en général, *tous* les nombres cardinaux possibles: tandis que la seconde définit, dans cet ensemble, une certaine classe, à savoir les nombres finis, et donne le moyen de les définir et de les construire progressivement (par l'addition répétée de 1); par là même, elle leur assigne un ordre. Mais, il importe de le remarquer, cette subordination réfute *ipso facto* les théories suivant lesquelles le nombre ordinal serait antérieur au nombre cardinal : les nombres seraient définis tout d'abord par leur rang, comme de simples numéros d'ordre, et n'acquerraient leur signification cardinale que par leur application au dénombrement des classes concrètes[2].

§ C. — Les nombres infinis.

La conséquence la plus importante de la distinction de ces deux définitions est la possibilité des nombres cardinaux infinis.

qu'on en puisse dire autant de la démonstration que M. Frege a proposée de la même loi (*Begriffsschrift*, prop. 81, 1879, et *Grundlagen der Arithmetik*, § 80, 1884), car elle repose sur une définition spéciale de « la succession dans une suite ».

1. Cf. Frege. *Grundlagen die Arithmetik*, §§ 82-83 (1884). Il convient de rappeler que c'est sur cette propriété que repose l'opération du dénombrement. On voit qu'elle est loin d'être primitive.

2. Telles sont les théories de Helmholtz, de Kronecker et de M. Dedekind, que nous avons exposées et critiquées dans *De l'Infini mathématique*, 2e partie, liv. I, ch. I et II.

En effet, par cela même que la définition ordinale est subordonnée à la définition cardinale, elle ne définit qu'*une partie* des nombres cardinaux, à savoir ceux qu'on peut obtenir en partant de 0 par l'addition répétée de 1. Rien ne permet d'affirmer qu'on obtient ainsi *tous* les nombres cardinaux ; on se borne à en ranger *quelques-uns* en une suite linéaire, et à distinguer les éléments de cette suite dans l'ensemble des nombres cardinaux. Tous les arguments dirigés contre les nombres infinis consistent à supposer qu'ils font partie de cette « suite naturelle des nombres », et qu'ils peuvent être obtenus par l'addition répétée de 1 ; c'est-à-dire à imposer à tous les nombres cardinaux les conditions qui définissent seulement les nombres finis, et à confondre les deux définitions du nombre que nous venons d'exposer.

Il faut bien remarquer, à ce propos, que le *principe d'induction* est un élément essentiel de la seconde définition, et que par suite il caractérise les nombres finis, de sorte que tous les raisonnements fondés sur ce principe ne valent que pour les nombres finis. Cette conséquence est contraire à l'opinion de M. Poincaré, qui, considérant le raisonnement par induction complète (ou par récurrence) comme « le raisonnement mathématique par excellence », a cru y voir l'intervention de l'idée d'infini, parce qu'un tel raisonnement enveloppe « une infinité de syllogismes », et par suite un principe synthétique « irréductible au principe de contradiction[1] ». Le raisonnement par induction n'est pas le procédé général de la déduction mathématique, puisqu'il ne s'applique que dans l'Arithmétique *des nombres finis* ; il n'enveloppe pas une infinité de syllogismes, car au contraire il permet de démontrer une proposition pour *tous* les nombres entiers finis sans qu'on ait à la

1. H. Poincaré, *Sur la nature du raisonnement mathématique*, ap. *Revue de Métaphysique*, t. II, p. 371 ; *La science et l'hypothèse*, p. 19 sqq. Cette remarque a été déjà faite par M. Burali-Forti (*Le classi finite*, p. 3, note 5, ap. *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino*, t. XXXII, 15 nov. 1896 ; et mémoire cité du *Congrès de Philosophie*). Auparavant, M. Frege avait déjà déduit la loi d'induction de principes purement logiques (*Begriffsschrift*, 1879) et établi que les lois de l'Arithmétique sont analytiques (*Die Grundlagen der Arithmetik*, 1884).

démontrer séparément pour *chacun* d'eux ; enfin le principe d'induction n'est pas un jugement synthétique, puisqu'il fait partie de la définition des nombres finis, et en exprime une propriété essentielle et caractéristique.

Il est néanmoins facile d'expliquer qu'on ait pu y voir en quelque sorte la définition de l'infini : c'est que, d'une part, ce principe, servant à caractériser les nombres finis, sert ainsi à définir indirectement les nombres infinis ; et que, d'autre part, en définissant la suite naturelle des nombres, il définit par là même une collection *infinie* d'objets[1]. Ainsi s'expliquent tous les paradoxes du nombre infini : le nombre des nombres finis est un nombre infini[2]. Par là même, il échappe aux prises du principe d'induction, qui ne vaut que pour les nombres finis. Encore une fois, c'est lui qui permet de démontrer les propriétés générales des nombres finis, malgré leur infinité ; les négateurs de l'infini supposent au contraire qu'on ne peut traiter les nombres finis que un à un et successivement, comme si leur ensemble ne pouvait être connu et appréhendé que par une énumération complète. C'est là d'ailleurs une propriété de tous les concepts généraux, qu'ils permettent de traiter à la fois tous les objets qui font partie de leur extension, ces objets fussent-ils en nombre infini. Un concept peut en effet avoir une compréhension finie et une extension infinie, et c'est ainsi que nous pouvons penser des ensembles infinis[3]. Certains arguments contre l'infini semblent méconnaître cette vérité, et impliquer qu'un concept qui représente une infinité d'objets doit envelopper une infinité de caractères, ce qui le rendrait évidemment impen-

1. On voit par là à quelle contradiction se condamnent ceux qui nient le nombre infini en invoquant le principe d'induction, qui implique précisément l'infinité de la suite naturelle.

2. Ce paradoxe ressort du rapprochement des deux propositions suivantes (Whitehead, *op. cit.*, prop. 2.42, 2.43) :

$$\text{« nombre fini } \varepsilon\ \alpha_0 \text{ », « } \alpha_0\ \varepsilon \text{ nombre infini »,}$$

qui n'ont, bien entendu, rien de contradictoire.

3. C'est dans ce sens seulement que le principe d'induction « enveloppe l'infini » ; il n'y a donc là rien qui puisse infirmer son caractère logique et analytique.

sable dans sa totalité. M. RUSSELL distingue nettement deux sortes de *régression à l'infini*, l'une légitime, celle qui implique une infinité d'objets ou de conditions extrinsèques; l'autre, illégitime, celle qui ferait dépendre le sens d'une proposition d'une infinité d'éléments, et qui exigerait, par suite, que l'on pensât simultanément une infinité d'idées [1]. On peut dire, en gros, que ces deux infinis sont relatifs, le premier à l'extension, le second à la compréhension. L'infini de compréhension seul est impensable, mais non l'infini d'extension, du moment qu'il correspond à un concept de compréhension finie. Contester la possibilité de ce fait, serait simplement nier l'existence et la valeur des concepts généraux, qui tous peuvent s'appliquer à une infinité d'objets. Ce serait méconnaître ce fait, qu'une classe peut être déterminée par un concept, et n'est pas nécessairement donnée par l'énumération de ses éléments [2]. Au surplus, une classe ne peut pas être définie (ni conçue primitivement) comme la somme logique de ses éléments, pas plus qu'un nombre ne doit être conçu comme la somme de ses unités; car, de même que l'addition arithmétique présuppose l'idée de nombre et porte sur des nombres, l'addition logique présuppose l'idée de classe et porte sur des classes déjà formées [3].

Nous venons d'obtenir une définition en quelque sorte négative de l'infini, au moyen du principe d'induction complète qui caractérise les nombres finis. On sait qu'il y a une autre définition de l'infini, plus positive, qui consiste à dire : Une classe (ou ensemble) est infinie quand elle est équivalente à une partie intégrante d'elle-même [4]. Cette définition (qui est celle de Georg CANTOR) peut être considérée comme *cardinale*, par opposition à la précédente, qui est *ordinale*. Or on ne peut pas admettre deux définitions différentes de l'infini; il faut en adopter une,

1. RUSSELL, *op. cit.*, §§ 55 et 99.
2. ID., *op. cit.*, § 72.
3. ID., *op. cit.*, chap. XV.
4. On appelle *partie intégrante* une partie non égale au tout. En particulier, on obtient une partie intégrante d'une classe en retranchant à celle-ci un de ses éléments.

et démontrer l'autre, ou la postuler comme un axiome [1]. M. Georg Cantor a essayé de démontrer qu'un ensemble fini n'est équivalent à aucune de ses parties, et qu'un ensemble infini est équivalent à une partie intégrante de lui-même [2]; mais cette double démonstration repose d'une part sur une définition insuffisante des nombres cardinaux finis [3], et d'autre part sur cette proposition, que tout ensemble infini contient un ensemble équivalent à la suite naturelle des nombres (de nombre cardinal α_0) [4]; or cette proposition, qui paraît évidente, n'a pas encore été rigoureusement démontrée.

M. Whitehead a également essayé de démontrer que les deux définitions en question sont équivalentes [5]; voici comment : Les nombres cardinaux *finis* étant définis comme ceux qu'on obtient par l'induction complète (en partant de 0), les classes *finies* sont par définition les classes qui possèdent un nombre cardinal fini; les nombres infinis et les classes infinies sont alors définis d'une manière purement négative. Cela posé, on définit le nombre α_0 comme le nombre cardinal des nombres finis; on démontre alors que α_0 est un nombre infini, et que toute classe infinie contient une partie qui a pour nombre α_0 (d'où il résulte que α_0 est le premier ou le plus petit des nombres infinis). De là on déduit qu'aucune classe finie n'est équivalente à une partie intégrante d'elle-même, et que toute classe infinie est équivalente à une partie intégrante d'elle-même, d'où il résulte que cette propriété est caractéristique des classes infinies. L'équivalence des deux définitions se trouve ainsi établie [6].

1. C'est ce que faisait encore M. Russell dans son mémoire *Sur la Logique des relations* (*Revue de Mathématiques*, t. VII, p. 135-136; août 1901).

2. *Sur les fondements de la théorie des ensembles transfinis*, § 6, théorèmes C et D.

3. *Ibid.*, § 5.

4. *Ibid.*, § 6, théorème A.

5. *On the cardinal numbers*, Section III, ap. *American Journal of Mathematics*, t. XXIV, n° 4 (octobre 1902).

6. Toutefois, cette démonstration suppose la proposition énoncée p. 53, note 3, qui, si évidente qu'elle paraisse, n'est pas encore démontrée. Dans son mémoire *Le classe finite* (1896), M. Burali-Forti déduisait le principe

D'ailleurs, on peut définir le premier nombre infini (α_0) sans présupposer la suite naturelle des nombres finis; par exemple, on peut dire que α_0 est le nombre cardinal de toute classe u qui possède les propriétés suivantes : u est le domaine d'une relation biuniforme R, dont le codomaine est contenu dans u mais non égal à u; u contient un élément qui est un antécédent de R sans en être un conséquent, et contient en outre les conséquents de toutes les relations R dont elle contient les antécédents [1]. On voit que cette définition est purement logique, et qu'elle n'implique nullement la notion de nombre entier fini [2].

L'inégalité des nombres infinis est toute différente de celle des nombres finis : on ne change pas un nombre infini en lui ajoutant ou retranchant une unité, ni par suite (en vertu du principe d'induction) en lui ajoutant ou retranchant un nombre fini. Pour que deux nombres infinis (correspondant à deux classes a et b) soient inégaux, il ne suffit pas que la classe a soit équivalente à une partie intégrante de la classe b : car elle pourrait en même temps (étant infinie) être équivalente à la classe b tout entière. Le nombre cardinal de a est *plus petit que* celui de b, si a est équivalente à une partie intégrante de b, et si b n'est équivalente à aucune partie intégrante de a. On a prouvé d'ailleurs que, si l'on a à la fois a équivalente à une partie intégrante de b et b équivalente à une partie intégrante de a, les deux classes a et b sont équivalentes, et par suite leurs nombres cardinaux sont égaux (ou plutôt identiques) [3].

d'induction de la définition cardinale de l'infini, mais au moyen du postulat suivant :

§ 2 P. 17 : $u \,\varepsilon\, \mathrm{K}'(\mathrm{K} - \iota\Lambda) \,.\, \supset \,.\, u < \cup' u$

« Si u est une classe de classes non nulles, son nombre cardinal est inférieur ou égal à celui de tous les éléments de ces classes. »

1. Pour faire mieux comprendre cette définition, on peut dire que la relation R est la relation d'un nombre au nombre suivant, et que par suite le conséquent de cette relation est le « suivant » de l'antécédent (Russell, *op. cit.*, p. 122).

2. Cette définition est exactement équivalente à la définition de la suite naturelle des nombres, telle qu'elle résulte des cinq axiomes de M. Peano (Russell, *op. cit.*, p. 127); elle est également équivalente à la définition de la *progression* donnée plus bas (p. 237).

3. Théorème de Bernstein, démontré ap. Borel, *Leçons sur la théorie des fonctions*, Note I (Paris, 1898); Russell, *op. cit.*, p. 306.

Ces définitions de l'égalité et de l'inégalité des nombres infinis sont purement cardinales, et n'impliquent aucune référence aux nombres finis.

La théorie des nombres cardinaux peut donc être constituée tout entière d'une manière directe et indépendante, sur des bases purement logiques, sans faire appel à l'idée d'ordre, sans même invoquer la distinction des nombres finis et infinis, ni par suite le principe d'induction [1]. Cela est prouvé par la Logistique dans le mémoire de M. Whitehead, où l'on trouve la démonstration absolument générale de la loi associative pour l'addition et la multiplication, et de la loi distributive de la multiplication par rapport à l'addition. On y trouve même (Section V) la définition des *puissances* d'un nombre cardinal, celle des arrangements, des combinaisons et des permutations d'un nombre quelconque (même infini) d'objets, et la démonstration des principaux théorèmes relatifs à ces notions, par exemple la généralisation de la formule du binôme. Tout cela est obtenu au moyen de la Logique des relations, qui apparaît décidément comme le véritable *organon* des Mathématiques pures. Grâce à elle, MM. Russell et Whitehead ont pu démontrer formellement, en partant de principes purement logiques, toutes les propositions de la théorie des ensembles découvertes par Georg Cantor, confirmer ainsi la validité logique de cette théorie, et la purger de tout postulat et de tout appel à l'intuition.

1. On pourrait presque dire que la théorie des nombres infinis est plus simple que celle des nombres finis, puisqu'elle n'a pas besoin, comme celle-ci, du principe d'induction, et qu'on peut l'établir sans passer par la théorie des nombres finis.

CHAPITRE III

L'IDÉE D'ORDRE

Nous avons dégagé l'idée de nombre de toute immixtion de l'idée d'ordre; mais nous avons vu par là même combien celle-ci a d'affinités avec celle-là. C'est que l'une et l'autre ont pour matière ou pour support des classes ou ensembles; seulement, tandis qu'une classe, dès qu'elle est donnée et déterminée, a un nombre, elle n'a un ordre que moyennant certaines relations établies entre ses éléments. L'idée d'ordre est donc moins primitive et moins simple que l'idée de nombre. Pour la définir, il convient de rechercher quelles espèces de relations établissent ou constituent un ordre entre les éléments d'une même classe.

§ A. — Les relations d'ordre.

Il y a, comme on sait, deux espèces d'ordres : l'*ordre linéaire* et l'*ordre circulaire*. Dans le premier, un terme est *avant* ou *après* un autre, il est ou n'est pas *entre* deux autres; dans le second, on ne peut plus affirmer ces relations, on peut seulement dire qu'un couple de termes a, b est séparé par un autre couple c, d, si ces quatre termes sont dans l'ordre : *acbda*... ou *adbca*... Une classe soumise à un ordre linéaire s'appelle une *suite ouverte*; soumise à un ordre circulaire, *suite fermée*[1]. M. Russell conclut des définitions précédentes qu'il faut trois termes pour définir un ordre linéaire, et quatre pour définir un ordre circulaire.

1. Le mot anglais *series* correspondant à la fois aux deux termes techniques *suite* et *série* (en allemand : *Folge* et *Reihe*), nous croyons devoir le traduire ici par *suite*.

Cela dépend de ce qu'on entend par *ordre* : si l'on n'attribue aucun *sens* à l'ordre, il est clair que deux termes *a*, *b* n'ont pas d'ordre, la disposition *ab* étant indiscernable de la disposition *ba* ; l'ordre ne sera déterminé que si l'on introduit un troisième terme, car alors *abc* (ou *cba*) diffère de *acb* (ou *bca*). C'est pourquoi M. Russell fait consister alors l'*élément ordinal* en un trio de termes tels que l'un d'eux est dit être *entre* les deux autres. De même, si l'on n'attribue aucun sens à l'ordre circulaire, trois termes *a*, *b*, *c* n'auront aucun ordre, la disposition *abca*... étant indiscernable de la disposition *acba*... L'ordre ne sera déterminé que par l'introduction d'un quatrième terme. C'est pourquoi M. Russell fait consister alors l'*élément ordinal* en deux couples de termes qui se séparent mutuellement. Mais, si l'on attribue un sens à l'ordre, deux termes pourront avoir un ordre linéaire, suivant que *a* est avant ou après *b* ; et trois termes pourront avoir un ordre circulaire, suivant que l'on aura, dans le sens direct, la succession *abc* ou la succession *cba*. Quoi qu'il en soit, tout ordre suppose ou implique des relations asymétriques entre deux termes quelconques, et la question de savoir si une telle relation définit déjà un ordre entre ses deux termes n'est plus qu'une question de mots. L'essentiel est d'énumérer les différentes *relations génératrices d'ordre*, pour pouvoir classer ensuite les diverses espèces d'ordre, et, s'il se peut, les ramener à l'unité.

La méthode la plus simple pour définir un ordre est la suivante (que nous avons déjà rencontrée dans la théorie des nombres finis). Soit une classe, finie ou infinie, et soit une relation S[1] asymétrique et biuniforme (donc intransitive)[2]. Chaque terme de la classe est un antécédent de cette relation (à l'exception peut-être d'un seul, qui sera alors le premier); et chaque terme de la classe est un conséquent de cette relation (à l'exception peut-être d'un seul, qui sera alors le dernier); on suppose en outre que, si $a\,S\,b$ et $b\,S\,c$, on n'a pas : $c\,S\,a$ (on

1. Pour plus de clarté, on pourra lire S : « est le suivant de ».
2. Car, si elle n'était pas intransitive, on aurait à la fois aSb, bSc et aSc, ce qui serait contraire à son uniformité.

n'a pas non plus : $a S c$, puisque la relation S est intransitive). On dira, dans ce cas, que b est entre a et c. La suite ainsi ordonnée peut avoir un premier et un dernier terme, ou seulement un premier terme, ou enfin n'avoir ni premier ni dernier terme. Dans le 1er cas, le nombre de ses termes est fini; dans le 2e cas, le nombre de ses termes est infini; dans le 3e cas, ce nombre est infini si la suite est *ouverte*, et fini si la suite est *fermée* [1].

Cette première méthode fournit uniquement des suites à termes consécutifs. La seconde est affranchie de cette restriction, mais elle ne fournit pas de suites fermées. Elle consiste à donner une relation transitive asymétrique P qui existe entre deux quelconques des termes de la classe. Autrement dit, soient x, y, z des termes différents de la classe, on a nécessairement une, et une seule, des deux relations : $x P y$, $y P x$, et si l'on a : $x P y$, $y P z$, on a aussi nécessairement : $x P z$ [2]. On peut démontrer alors que, sur trois termes quelconques de la classe, il y en a toujours un qui est *entre* les deux autres (qui précède l'un et suit l'autre); par conséquent, la classe forme toujours une suite unique (ou connexe). Elle ne peut pas former une suite fermée, car, à cause de la transitivité de la relation P, on aurait alors $x P x$, ce qui est impossible, cette relation étant asymétrique.

Une troisième méthode consiste à ranger tous les termes d'une classe suivant leurs distances à un même terme x : ces distances sont des grandeurs inégales, et on peut ranger les termes par ordre de distance croissante (ou décroissante). Si le terme x n'est pas le premier (ou le dernier), il y aura des distances négatives, qui seront considérées comme plus petites que zéro [3] et que toutes les distances positives. En outre, les distances doivent avoir un sens déterminé, c'est-à-dire être

1. Nous supposons qu'elle est *connexe*, c'est-à-dire ne se décompose pas en plusieurs suites n'ayant aucun terme commun et aucune relation entre leurs termes respectifs.

2. La relation P peut se lire : « précède »; la relation converse ^cP se lira alors : « suit ».

3. Le zéro de distance est la distance d'un terme à lui-même.

des relations asymétriques. Pour que l'ordre soit indépendant du terme (x) pris pour point de repère, il faut que l'axiome suivant soit vérifié : « Si xz est plus petite que xw, yz doit être plus petite que yw ». Ce cas peut se ramener au précédent en prenant pour la relation $x\,Py$ la relation : $xy > 0$ (dire que x précède y, c'est dire que la distance xy est plus grande que zéro). Cette réduction postule un nouvel axiome : « Si l'on a $xz = yw$, et $xy = zw'$, les termes w et w' doivent être identiques. »

Une quatrième méthode consiste à donner une relation à trois termes $yR(x, z)$, qui signifiera que y est entre x et z. Cette relation sera symétrique par rapport à x et z, c'est-à-dire que : $yR(x, z) = yR(z, x)$. Écrivons, pour rendre la notation plus simple et plus intuitive : (xyz). Il faut postuler les deux axiomes suivants : « Si l'on a : (xyz) et (yzw), on doit avoir aussi : (xyw) et (xzw). » — « Si l'on a : (xyw) et (yzw), on doit avoir aussi : (xzw) et (xyz). »

Les méthodes précédentes ne peuvent donner naissance à des suites continues fermées, ce qui est au contraire le propre des deux suivantes. La cinquième méthode consiste à établir une relation asymétrique R entre des relations asymétriques $x, y, z,\ldots$ formant une classe; cette relation R est telle qu'elle existe entre deux relations quelconques x et y, à moins que y ne soit la converse de x, et que, si elle existe entre x et y, elle existe aussi entre y et ${}^cx$. La suite ainsi définie est fermée : car $x\,Ry \,.\, \supset \,.\, y\,R\,{}^cx \,.\, \supset \,.\, {}^cx\,R\,{}^cy \,.\, \supset \,.\, {}^cy\,Rx$. Deux termes converses l'un de l'autre, comme ${}^cx$ et x, ${}^cy$ et y, sont dits *opposés*. Dans une suite de ce genre, on ne peut pas dire qu'un terme est entre deux autres; mais on peut dire que deux couples de termes se séparent mutuellement. Un exemple de cette espèce d'ordre est fourni par les angles (qui sont des relations entre les demi-droites issues d'un même point dans un même plan).

La sixième et dernière méthode, qui engendre aussi des suites fermées, consiste à établir directement entre les termes d'une classe la relation à 4 termes qui signifie que deux couples

se séparent mutuellement. Pour dire que les couples (a, b) et (c, d) se séparent mutuellement, on écrira : $ab \parallel cd$. Cet ordre postule les cinq axiomes suivants :

1° $ab \parallel cd . = . cd \parallel ab$

(la relation est symétrique par rapport aux deux couples);

2° $ab \parallel cd . = . ab \parallel dc$

(la relation est symétrique par rapport aux deux termes de chaque couple);

3° $ab \parallel cd$ exclut $ac \parallel bd$;

4° Pour 4 termes quelconques a, b, c, d, on a, soit $ab \parallel cd$, soit $ac \parallel bd$, soit $ad \parallel bc$;

5° Si l'on a : $ab \parallel cd$, et $ad \parallel be$, on a aussi : $ad \parallel ce$.

Ces cinq axiomes sont suffisants[1], et en outre ils sont indépendants dans l'ordre où ils sont formulés, c'est-à-dire que chacun d'eux est indépendant des précédents[2].

Telles sont les six méthodes qu'on peut employer, et qu'on emploie en fait pour définir un ordre. On remarquera que la plupart des auteurs qui ont traité de l'ordre n'en connaissent qu'une ou deux; si cette énumération est complète, c'est qu'elle repose, non sur des vues *a priori*, mais sur l'étude des Mathématiques modernes. Cela prouve, en passant, qu'il y a plus d'enseignements, d'exemples et de documents relatifs à la méthode dans les livres des mathématiciens que dans tous les traités de Logique. Reste à savoir ce qu'il y a de commun entre ces six méthodes; car, bien qu'elles aient chacune leurs caractères spéciaux, la nature de l'ordre défini ne dépend pas de la méthode employée; le même ordre peut être défini par plusieurs méthodes. Il s'agit de découvrir ce qui constitue l'*essence* de l'ordre, et de ramener autant que possible ces six méthodes à un fondement commun[3].

En premier lieu, on peut ramener toutes les relations génératrices d'ordre à deux, que nous avons déjà mentionnées : la relation d'*entre* entre trois termes, et la relation de *séparation*

1. Vailati, ap. *Revue de Mathématiques*, t. V, p. 76, 183.
2. Padoa, ap. *Revue de Mathématiques*, t. V, p. 185.
3. Russell, *op. cit.*, chap. xxv.

entre quatre termes. Analysons d'abord la relation d'*entre* [1]. Quand on dit que le terme y est entre les termes x et z, on veut dire que x précède y et que y précède z : soit P la relation *précède*, on écrira : $x\,Py\,.\,y\,Pz$. Mais la relation *précède* est essentiellement asymétrique : on ne peut pas avoir : $y\,Px$, ni $z\,Py$, de sorte qu'on a : $y - Px\,.\,z - Py$. Il semble qu'il faille ajouter une cinquième condition : $z - Px$, pour exclure le cas où la suite serait fermée ; car, dans une suite fermée, on ne peut plus dire de trois termes donnés que l'un est entre les deux autres. Mais cette condition est inutile, comme on va le voir. Posons donc, pour abréger :

$$xyz\ .=.\ xPy\ .\ yPz\ .\ z-Py\ .\ y-Px$$

et voyons si la relation xyz correspond bien à la notion d'*entre*. Celle-ci vérifie les deux axiomes suivants : 1° Si y est entre x et z, et si z est entre y et w, alors z est entre x et w ; 2° Si y est entre x et z, et w entre x et y, alors y est entre w et z. Or on peut vérifier que xyz et yzw impliquent xyw, conformément au 1er axiome, si la relation P est transitive, et alors seulement. Mais si elle n'est pas transitive (ce qui est le cas dans la 1re méthode, où P est une relation biuniforme), on peut la remplacer par une relation R qui est la somme logique des puissances de P, et qui sera transitive [2]. Mais, la relation P étant asymétrique, la relation R doit l'être aussi ; on ne pourra donc jamais avoir : $x\,{}^{c}Ry$ (ou yRx), c'est-à-dire que la suite ne pourra pas être fermée [3]. On voit que dans ce cas la condition $z - Px$ devient inutile.

1. On voudrait pouvoir dire : « *inter-ité* », comme on dit en anglais : *betweenness*. On peut le dire dans une langue artificielle (en Esperanto : *intereco*).

2. Voici ce que cela signifie en langage ordinaire. Soit P = *précède immédiatement* : cette relation est biuniforme, donc intransitive : si l'on a : $xPy\,.\,yPz$, on ne peut pas avoir : xPz ; mais on a : xP^2z (P^2 étant le produit relatif de P par lui-même). On aura de même, si zPw : xP^3w, et ainsi de suite. Les relations P^2, P^3,... P^n sont avec P les *puissances* successives de la relation P ; toutes sont biuniformes et intransitives. Mais leur somme logique R est transitive, car elle signifie : *précède* (immédiatement ou non), et l'on a : xRy, yRz, zRw,... xRz, yRw,... xRw,...

3. Car si l'on avait : $xRy\,.\,yRx$, on aurait (R étant transitive) : xRx,

D'autre part, xyz et xwy impliquent wyz, conformément au 2[e] axiome, mais seulement si P n'est pas une relation biuniforme. Ici encore, on n'aura qu'à remplacer P par R. Et la condition que P^n ne doit jamais être égale à ${}^cP$ (que la suite ne doit pas être fermée) équivaut à celle-ci, que R doit être asymétrique. On peut donc conclure finalement : « Dire que y est entre x et z, c'est dire qu'il y a une relation asymétrique transitive entre x et y et entre y et z. » Rien de plus, rien de moins : c'est là exactement le sens de la relation d'*entre*, ou, pour parler mathématiquement, c'est là la condition *nécessaire* et *suffisante* de l'existence de cette relation.

Nous avons là un exemple remarquable de l'analyse d'une relation à 3 termes en 2 relations à 2 termes. On pourrait faire l'objection suivante : La relation d'*entre* est symétrique par rapport aux deux termes extrêmes; dire que y est entre x et z n'implique nullement que x soit le premier et z le dernier, ni même que l'un de ces termes précède l'autre. Il semble donc que la relation à 2 termes entre x et y, y et z, ne doive pas être asymétrique. Mais, si elle n'était pas asymétrique, il se pourrait que y eût la même relation par rapport à x et à z, et fût par suite « du même côté » par rapport à ces deux termes, au lieu d'être *entre* eux. D'ailleurs, il faut remarquer que, dans la définition formulée ci-dessus, rien n'indique le *sens* de la relation à 2 termes qui doit exister entre x et y, y et z : elle peut être aussi bien *suit* que *précède*. Le fait que ce sens reste indéterminé traduit précisément la symétrie de la relation à 3 termes. Il n'y a donc rien d'impossible ni de paradoxal à ce qu'une relation à 3 termes *symétrique* corresponde à deux relations à 2 termes *asymétriques*.

Passons à la relation de *séparation* entre 4 termes. On va voir qu'elle est aussi réductible à une relation transitive asymétrique entre 2 termes. En effet, on peut démontrer que, s'il

c'est-à-dire que la relation R ne serait plus asymétrique. En d'autres termes, si l'on avait, pour une puissance quelconque de P, $P^n = {}^cP$, on aurait : $P^{n+1} = {}^cP * P$, ce qui est la relation d'identité, P étant biuniforme. Après n termes, on retomberait sur le 1[er] terme x.

existe une relation transitive asymétrique entre deux termes quelconques d'une suite de quatre termes au moins, les termes de cette suite, pris quatre à quatre, présentent la relation de séparation, caractérisée par les cinq axiomes de Vailati. Inversement, M. Vailati a démontré que, s'il y a relation de séparation, c'est-à-dire si les cinq axiomes sont vérifiés par cinq termes quelconques d'une suite, il existe entre deux termes quelconques une relation transitive asymétrique (*précède*), de sorte que la relation de séparation entre quatre termes *a*, *b*, *c*, *d* se réduit aux trois relations binaires : *a* précède *b*, *b* précède *c*, *c* précède *d*. L'existence d'une relation binaire transitive asymétrique, étant à la fois la condition nécessaire et suffisante de l'existence d'une relation de séparation, lui est exactement équivalente, et peut lui être substituée dans tous les cas. Toutefois, il faut remarquer que cette réduction repose sur la considération de trois termes fixes (par exemple *a*, *b*, *c*) par rapport auxquels est définie la relation binaire (entre *d* et *e*, considérés comme variables).

Ainsi toutes les méthodes génératrices d'ordre ont été ramenées à deux relations, l'une ternaire (*entre*), l'autre quaternaire (*séparation*), et ces deux relations à leur tour peuvent se réduire à un seul et même type de relation binaire, à savoir à une relation transitive asymétrique. C'est donc dans une telle relation que consiste l'essence de l'ordre ; et toutes les espèces d'ordre que nous avons distinguées se trouvent ramenées à l'unité. Ce qui est particulièrement remarquable dans cette conclusion, c'est qu'on a pu ramener à l'unité l'ordre linéaire et l'ordre circulaire, autrement dit les suites ouvertes et les suites fermées. Et en effet, il suffit de *couper* une suite fermée pour la transformer en une suite ouverte, c'est-à-dire de prendre pour point de départ de la relation binaire un terme quelconque qui sera le *premier*. Toute la différence est que, dans une suite fermée, le premier terme est en effet un terme *quelconque*, tandis que dans une suite ouverte il est unique et déterminé.

§ B. — Le nombre ordinal.

La théorie de l'ordre engendre naturellement la théorie des nombres ordinaux. Par « nombres ordinaux » il ne faut pas entendre les numéros d'ordre des éléments d'une suite (*premier*, *deuxième*, *troisième*...), mais les *types d'ordre* des classes bien ordonnées, suivant l'expression de Georg Cantor. Comme les nombres cardinaux, les nombres ordinaux sont définis par abstraction. Mais auparavant, il importe de définir la *similitude* des suites. La similitude est, pour les classes ordonnées, la relation analogue de l'équivalence des classes : l'équivalence est cardinale, la similitude est ordinale.

On dit que deux classes ordonnées ou suites u, v sont *semblables* [1], lorsqu'il y a entre elles une relation univoque et réciproque telle que, si dans u l'élément a_1 précède l'élément b_1, dans v l'élément a_2 précède l'élément b_2 (a_2, b_2 étant respectivement les corrélatifs de a_1, b_1). Plus exactement, la relation de similitude existe, non entre les classes, mais entre les relations ordinatrices dont elles sont les champs; en effet, tout ordre est engendré par une relation, et la même classe peut recevoir divers ordres, en conséquence de relations différentes. On dira donc que deux relations P, Q sont semblables, lorsqu'il y a entre leurs champs respectifs une correspondance univoque et réciproque telle, qu'à deux éléments qui ont entre eux la relation P correspondent deux éléments ayant entre eux la relation Q. On peut enfin exprimer cette définition sous une forme symbolique : soit S la relation biuniforme qui fait correspondre les éléments de u et les éléments de v chacun à chacun; on a les relations figurées dans le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} a_1 & P & b_1 & P & c_1 & P & d_1 \ldots\ldots \\ S & & S & & S & & S \\ a_2 & Q & b_2 & Q & c_2 & Q & d_2 \ldots\ldots \end{array}$$

1. En anglais : *like*, *likeness* (distinct de *similar*, *similarity*). V. p. 47, note 1.

On a par exemple : a_1Pb_1, a_2Qb_2, et d'autre part : a_1Sa_2, b_1Sb_2. On peut définir la relation Q au moyen (en fonction) des relations P et S; en effet :

$$a_2Qb_2 . = . a_2{}^cSa_1 . a_1Pb_1 . b_1Sb_2$$

D'où :

$$Q = {}^cS * P * S.$$

On remarquera en outre que le *domaine* de la relation S est la première suite : a_1, b_1, c_1, ..., c'est-à-dire le *champ* de la relation P. On peut donc dire que deux relations P, Q sont semblables, s'il existe une relation biuniforme S dont le domaine est le champ de P, et telle que $Q = {}^cS * P * S$. Telle est la définition de la similitude formulée dans la Logique des relations [1].

La relation de similitude est symétrique et transitive. Dès lors, elle donne lieu, en vertu du *principe d'abstraction*, à une relation uniforme qui unit toutes les classes (ou relations) semblables entre elles à un même terme. Ce terme unique sera, au point de vue de l'extension, la classe des classes semblables entre elles; et, au point de vue de la compréhension, la propriété commune à toutes ces classes, c'est-à-dire leur type d'ordre ou leur nombre ordinal.

Pour une classe finie d'un nombre n de termes, toutes les suites qu'on peut former avec ses éléments sont semblables, et elles ne sont semblables à aucune suite de $(n + 1)$ ou de $(n - 1)$ éléments. Par conséquent, le nombre ordinal d'une telle classe est déterminé d'une manière univoque et réciproque par son nombre cardinal. Cette correspondance biuniforme entre les nombres ordinaux et cardinaux *finis* explique qu'on les confonde couramment. Le *nombre ordinal* usuel, le numéro d'ordre (« le n^e ») est une autre idée : c'est l'idée du

1. RUSSELL, *op. cit.*, p. 242, 262. M. RUSSELL remarque que la similitude est, entre les relations, l'analogue exact de l'équivalence entre les classes. De même qu'une classe de classes équivalentes est un nombre, une classe de relations semblables est un *nombre-relation*, et l'on peut étudier sur ces *nombres-relations* des propriétés analogues à celles des nombres, qui font l'objet d'une *Arithmétique des relations* (*op. cit.*, § 253, 299).

terme qui, dans une suite, en a $(n - 1)$ avant lui. C'est, comme on voit, un mélange d'idées cardinales et ordinales, puisqu'elle implique, d'une part, une suite d'au moins n termes (donc le nombre ordinal n), et d'autre part le nombre cardinal $n - 1$.

La définition qu'on a donnée des nombres ordinaux s'applique également aux nombres finis et infinis, et rien jusqu'ici ne permet de les distinguer. Pour y arriver, il faut définir un nombre ordinal spécial, ω, qui est le nombre ordinal des *progressions*; ou, ce qui revient au même, il faut définir une classe spéciale de suites, qu'on appelle les *progressions* [1].

Pour le dire d'avance, une *progression* est une suite semblable à la suite des nombres cardinaux finis. Mais, si l'on veut se passer de l'idée de nombre, on peut définir directement les progressions comme suit :

« Une progression est une classe u contenue dans le domaine d'une relation biuniforme, qui possède les propriétés suivantes : 1° l'ensemble des conséquents est contenu dans l'ensemble des antécédents sans lui être identique; 2° si s est une classe quelconque qui contient au moins un des antécédents qui ne sont pas conséquents, et qui contient le conséquent de chacun des u qu'elle contient, elle contient tous les u. »

La première condition entraîne l'infinité de la classe u; la seconde exprime le principe d'induction. Ainsi celui-ci est une partie essentielle de la définition des progressions, et c'est pour cela que les progressions sont semblables à la suite naturelle des nombres. On démontre alors que dans une progression il n'y a qu'un antécédent qui ne soit pas conséquent; ce terme unique (qui est le premier) sera le *zéro* de la progression considérée. Le *un* sera le conséquent de *zéro* (il est unique, puisque la relation génératrice est biuniforme); et en général, le suivant d'un terme x (seq x) sera le conséquent de ce terme. En vertu de la 1re condition, tout terme a un conséquent.

1. Bien entendu, il faut dépouiller ce mot du sens qu'on lui donne en Arithmétique élémentaire (progressions arithmétiques et géométriques). La théorie des progressions a été exposée par M. Russell dans son mémoire *Sur la Logique des relations*, § 3, ap. *Revue de Mathématiques*, t. VII (1901).

On peut alors démontrer que deux progressions quelconques sont semblables, et, réciproquement, que toute suite semblable à une progression est une progression. Il en résulte que les progressions forment une classe unique de classes semblables, ce qui justifie la définition du nombre ordinal ω comme la classe des progressions. On démontre en outre que tout terme d'une progression diffère du suivant ; qu'il diffère aussi de tous les précédents, de sorte que le même terme ne peut jamais revenir ; enfin, que si l'on supprime 1, 2, ... n (nombre fini) termes au commencement d'une progression, le reste est encore une progression. On définit ensuite l'addition et la multiplication des nombres ordinaux finis, et l'on démontre leurs propriétés formelles, y compris la commutativité, car cette fois les opérations impliquent un ordre entre les nombres combinés. On peut donc constituer, au moyen du calcul des relations, toute l'arithmétique des nombres ordinaux finis, sans jamais invoquer la notion de nombre cardinal.

Il n'en est pas moins vrai que la notion de nombre cardinal est antérieure à celle de nombre ordinal, parce qu'elle est logiquement plus simple : elle n'implique en effet qu'une seule relation biuniforme entre deux classes, tandis que la notion de nombre ordinal implique, *en outre*, une relation génératrice d'ordre dans chacune de ces classes. En d'autres termes, la relation de similitude est plus compréhensive que la relation d'équivalence : elle implique l'équivalence, et quelque chose de plus.

La même méthode logique permet d'expliquer la généralisation du nombre. Et d'abord, les nombres rationnels (ou fractions) seront considérés comme des *relations* entre nombres entiers, comme des *rapports*. On dira, par exemple, que le nombre a a la relation B avec le nombre c (aBc) si l'on a : $ab = c$, c'est-à-dire si a multiplié par b donne c. Ainsi à chaque nombre entier b correspond un rapport ou une relation B. Par suite, étant donnés deux nombres entiers a et d, on dira qu'il y a entre eux la relation complexe $B * {}^cC$ ($a\ B * {}^cC\ d$), si le produit de a par b est égal au produit de d par c ($ab = cd$),

b et c étant aussi des nombres entiers. Et cette relation $B * {}^cC$ sera le rapport b/c. Comme, en Mathématiques, les relations s'expriment par des opérations, on peut dire que le rapport b/c est le symbole des opérations à effectuer sur a pour obtenir d (à savoir, une multiplication par b suivie d'une division par c; car l'égalité $ab = cd$ équivaut à : $a \times b/c = d$). Ainsi les nombres rationnels ne sont pas des nombres, mais des *opérations* sur les nombres entiers; de sorte qu'on ne doit pas identifier aux nombres entiers les nombres rationnels qui leur correspondent (les fractions à dénominateur 1) [1].

De même, les nombres positifs et négatifs seront conçus comme des opérations sur les nombres absolus (entiers ou rationnels). Considérons d'abord un nombre entier, a. Soit R la relation biuniforme qui existe entre chaque nombre et son suivant (et par suite ${}^cR$ celle qui existe entre chaque nombre et son précédent). Le nombre positif $+ a$ indiquera l'opération qui correspond à la relation R^a, et le nombre négatif $- a$ l'opération qui correspond à la relation ${}^cR$. En d'autres termes, $+ a$ signifie qu'on doit avancer de a rangs, et $- a$ qu'on doit reculer de a rangs dans la progression [2]. Cette conception est, on le voit, tout à fait conforme au sens commun, et aux considérations intuitives par lesquelles on explique, dans les éléments, la différence du positif et du négatif; mais elle est néanmoins indépendante de toute notion géométrique et de toute intuition.

De même, les nombres rationnels positifs et négatifs seront des opérations sur les nombres rationnels absolus. On a défini l'inégalité et l'addition des nombres rationnels absolus, et on sait que, si la fraction p est plus petite que la fraction q, celle-ci est la somme de p et d'une 3e fraction r. La fraction positive $+ r$ désignera l'opération par laquelle on passe de p à q, et la fraction négative $- r$ l'opération inverse (par laquelle

1. On retrouve ainsi, en somme, la conception de la fraction comme symbole opératoire, proposée par M. Méray (*Les fractions et les quantités négatives*, 1890).

2. On a défini plus haut les puissances entières d'une relation (p. 73, note 2).

on passe de q à p). Ainsi toutes les espèces du nombre généralisé sont, non pas des nombres, mais des opérations, ou mieux des relations entre les nombres entiers absolus, et ne doivent pas être identifiées, même partiellement, à ceux-ci. Cette conception introduit une clarté et une rigueur parfaites dans l'Arithmétique générale, et prévient radicalement les confusions d'idées qui s'y glissent trop souvent.

Il convient de remarquer, avec M. Russell, que, si les propriétés cardinales des nombres finis sont les plus importantes dans les applications (dénombrement et mesure), leurs propriétés ordinales sont les seules que l'on ait à considérer dans les Mathématiques pures, de sorte qu'on peut, dans ce domaine, se contenter de la définition ordinale du nombre, c'est-à-dire considérer les nombres finis comme formant une *progression* [1]. C'est ce qui explique que d'éminents mathématiciens aient cru pouvoir réduire l'idée de nombre à celle de nombre ordinal [2]. Cela explique aussi que ceux qui considèrent le nombre ordinal comme seul *a priori* croient que l'expérience ou l'intuition est nécessaire pour engendrer le nombre cardinal. Mais c'est là une erreur, car le nombre cardinal, on l'a vu, est plutôt antérieur au nombre ordinal, et par suite au moins autant *a priori* que lui.

Pour compléter la généralisation du nombre, il resterait à définir les nombres irrationnels et les nombres complexes. Mais la théorie des nombres irrationnels est inséparable de la notion de continu, qui demande une étude spéciale; et la théorie des nombres complexes implique la notion de dimension, qui appartient à la théorie de l'espace. Ainsi la généralisation du nombre nous conduit à deux théories nouvelles, qui feront l'objet des chapitres suivants.

1. Russell, *op. cit.*, p. 241.
2. Voir p. 61, note 2.

CHAPITRE IV

LE CONTINU

Les nombres irrationnels, avons-nous dit, impliquent l'idée de continuité, ils ne paraissent pouvoir s'expliquer et se justifier que par elle ; mais, en revanche, cette idée ne devient précise et rigoureuse que lorsqu'on la représente par les nombres réels, qui comprennent nécessairement les nombres irrationnels. C'est ce qui fait croire à certains mathématiciens que l'idée de continu procède de l'idée de nombre, et est engendrée par la création des nombres irrationnels. Quoi qu'il en soit, que les nombres réels soient l'original ou la copie du continu, il est incontestable qu'il y a une analogie et un parallélisme parfait entre les deux notions, et qu'on ne peut expliquer l'une sans l'autre. Analyser le continu, c'est définir les nombres irrationnels. Commençons donc par cette définition.

§ A. — Définition du nombre irrationnel.

On a proposé diverses manières de définir les nombres irrationnels. La conception qui devait se présenter le plus aisément à l'esprit des mathématiciens est celle qui considère les nombres irrationnels comme des *limites* de suites ou de séries convergentes qui n'ont pour limite aucun nombre rationnel. Mais les théories de ce genre ne prouvent nullement l'existence (logique) des nombres irrationnels : elles la postu-

lent au contraire [1]. En outre, il y a quelque chose de paradoxal et de choquant pour l'esprit à dire : « Telle suite ou série n'a pas de limite (parmi les nombres rationnels); elle aura, par définition, pour limite un nombre irrationnel »; en d'autres termes, à dire qu'un nombre irrationnel est la limite d'une suite qui n'a pas de limite [2]. Enfin, il y a quelques précautions à prendre pour définir l'égalité (ou identité) des nombres irrationnels, car le même nombre irrationnel peut être défini par une infinité de suites ou de séries toutes différentes; il faut quelque soin pour reconnaître que leurs limites, données d'abord comme distinctes, sont réellement identiques.

Une autre manière de définir les nombres irrationnels est celle de MM. Dedekind et J. Tannery [3]. Elle a l'avantage de se passer complètement de l'idée de limite, et de situer d'emblée les nombres irrationnels par rapport aux nombres rationnels. Elle part de ce fait que l'ensemble des nombres rationnels offre une infinité de *coupures*. On sait ce qu'il faut entendre par là. Chaque nombre rationnel partage l'ensemble des autres nombres rationnels en deux classes : celle des nombres plus grands que lui, et celle des nombres plus petits que lui; on les appelle, pour abréger, *classe supérieure* et *classe inférieure*. Il est clair que chaque nombre de la classe inférieure est plus petit que chaque nombre de la classe supérieure. En outre, étant donné qu'entre deux nombres rationnels il y en a toujours un autre (supérieur au plus petit et inférieur au plus grand) [4], il n'y a dans la classe inférieure aucun nombre plus grand que tous les autres, ni dans la classe supérieure aucun nombre plus petit que tous les autres. Tout cela résulte des

1. D'après M. Georg Cantor, Weierstrass serait le premier qui aurait évité ce cercle vicieux (*Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre*, p. 22).

2. M. Frege s'élève avec beaucoup de force et de justesse contre cette sorte de « définitions créatrices », et soutient qu'une définition mathématique, n'étant proprement qu'une imposition de nom, ne peut pas créer son objet, et ne peut dispenser d'en démontrer l'existence (*Grundgesetze der Arithmetik*, t. II, 1903; *Function und Begriff*, 1891).

3. Voir notre ouvrage *De l'Infini mathématique*, 1re partie, livre I, chap. IV.

4. Propriété qu'on exprime en disant que l'ensemble est *compact*.

propriétés mêmes des nombres rationnels. Le phénomène de la coupure consiste en ceci, que la *totalité* des nombres rationnels peut être répartie (d'une infinité de manières) en deux classes possédant les mêmes caractères, *sans qu'il y ait entre les deux classes aucun nombre rationnel* qui les sépare et les détermine. On est ainsi amené à concevoir un nombre (*irrationnel*) qui serait à la fois plus grand que tous les nombres de la classe inférieure et plus petit que tous ceux de la classe supérieure, et qui comble en quelque sorte la coupure, de même que dans le cas précédent elle était comblée par un nombre rationnel. Toute la différence consiste en ce que le nouveau nombre est déterminé et défini par la coupure, au lieu de la déterminer, comme fait le nombre rationnel. Mais, une fois que les nombres irrationnels sont définis et ajoutés à l'ensemble des nombres rationnels, on peut confondre les uns et les autres, sous le nom de *nombres réels*, car ils jouissent en somme des mêmes propriétés.

Cette définition n'a qu'un défaut, qui lui est commun avec la précédente : elle ne permet pas de prouver l'existence des nombres irrationnels. M. Dedekind a dû postuler cette existence, en formulant pour l'ensemble des nombres réels un *axiome de continuité*, analogue à l'axiome qui caractérise la continuité géométrique (de la ligne droite) : « Si l'ensemble des nombres réels peut être réparti en deux classes telles que chaque nombre de la première soit plus petit que chaque nombre de la seconde, il existe un nombre réel, et un seul, qui produit cette répartition [1]. » Cet énoncé est un peu vague : que faut-il entendre par le nombre qui *produit* une répartition? Ce ne peut être un nombre *intermédiaire* entre les deux classes, puisque par hypothèse celles-ci comprennent ensemble la *totalité* des nombres *réels*. Il faut donc que le nombre en question soit le plus grand de la classe inférieure ou le plus petit de la classe supérieure. Mais alors, c'en est fait des propriétés caractéristiques de la coupure, puisque la définition de

1. DEDEKIND, *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, p. 18 (1872).

celle-ci implique à la fois que la classe inférieure n'a pas de maximum et que la classe supérieure n'a pas de minimum. Il faut donc revenir à l'ensemble des nombres *rationnels*, et dire que toute coupure de cet ensemble correspond à un nombre *réel*. Ou bien il faut modifier la définition de la continuité, et dire : « Si l'ensemble des nombres réels peut être réparti en deux classes telles que chaque nombre de la première soit plus petit que chaque nombre de la seconde, ou bien la première a un maximum, ou bien la seconde a un minimum, mais jamais les deux à la fois ». Mais alors l'axiome perd beaucoup de son évidence, parce que le fait de la coupure en a disparu.

Dans tous les cas, cet axiome, ou un axiome équivalent, est nécessaire pour affirmer l'existence des nombres irrationnels, et cela est fâcheux, d'abord parce qu'il conviendrait que leur existence pût se déduire de leur définition ; ensuite, parce qu'on peut toujours refuser d'admettre l'axiome ou postulat en question, qui ne se justifie que par une analogie contestable ; enfin, parce que cet axiome, même quand on l'admet, produit un hiatus dans l'enchaînement déductif des propositions, et semble constituer un appel à l'intuition, qui serait ruineux pour la thèse de la nature logique des vérités mathématiques.

M. Russell a réussi à se passer de cet axiome en modifiant la définition du nombre irrationnel de telle sorte qu'elle implique *ipso facto* l'existence de l'objet défini. Sa définition consiste, en deux mots, à identifier le nombre irrationnel à la *classe inférieure* qui servait précédemment à la définir. Seulement, cette classe doit être maintenant définie par ses propriétés intrinsèques. On appellera *segment* [1] toute classe de nombres rationnels non nulle, qui ne comprend pas tous les nombres rationnels, qui comprend tous les nombres rationnels plus petits qu'un quelconque de ses éléments, et telle que chacun de ses éléments est plus petit qu'un autre de ses éléments (de

1. Cette conception du nombre irrationnel comme un segment (*Zahlenstrecke*) est due à Pasch, *Einleitung in die Differential- und Integral-Rechnung* (Leipzig, 1882).

sorte qu'aucun d'eux n'est le maximum). Ces deux dernières conditions s'expriment très simplement en symboles. Soit θ l'ensemble des nombres rationnels plus petits que 1 (fractions propres) ; θx sera l'ensemble des nombres rationnels plus petits que x. Par extension, si u est une classe de nombres, θu sera la classe des nombres plus petits que quelque u. Cela posé, les deux conditions énoncées signifient que, si u est un segment, on a à la fois : $\theta u \supset u$, et $u \supset \theta u$, c'est-à-dire : $\theta u = u$. On démontre aussitôt que θ est un segment, et que, si x est un nombre rationnel, θx est un segment (ce qui implique que $\theta\theta x = \theta x$). Mais la réciproque n'est pas vraie : tous les segments ne sont pas de la forme θx, x étant un nombre rationnel. Il y a donc, pour parler grossièrement, *plus* de segments que de nombres rationnels. Ces segments seront, *par définition*, les nombres réels. On définit aisément leur addition et leur multiplication, et l'on démontre que ces opérations jouissent des mêmes propriétés que les opérations de même nom sur les nombres rationnels. Une partie des nombres réels *correspondent* aux nombres rationnels : ce sont les segments de la forme θx; mais, à parler rigoureusement, ils ne doivent pas être identifiés à ceux-ci; de même qu'aucun nombre rationnel n'est un nombre entier, aucun nombre réel n'est un nombre rationnel. Un nombre rationnel est une relation de deux nombres entiers (un *rapport*), et un nombre réel est un ensemble de nombres rationnels. Par exemple, on distinguera trois nombres 1 : le nombre entier 1 ; le nombre rationnel 1, qui est le rapport de 1 à 1 (ou le rapport de n à n, identique au précédent); et le nombre réel 1, qui est l'ensemble des nombres rationnels plus petits que le nombre rationnel 1 (ensemble désigné par θ). On voit que dans cette conception l'*existence* des nombres réels ne fait pas plus question que celle des nombres rationnels : les nombres rationnels existent, en tant que rapports des nombres entiers ; les nombres réels existent, en tant qu'ensembles de nombres rationnels.

La conception précédente n'est pas si éloignée qu'il semble de la conception ordinaire du nombre irrationnel, et elle en

est directement issue. En effet, au lieu de concevoir le nombre irrationnel comme limite commune des deux classes (supérieure et inférieure) qui le définissent, il revient au même (et il est plus simple) de le concevoir comme *limite supérieure* de la classe inférieure. Voici d'abord comment on définit la limite supérieure (qu'on représente par le symbole l') :

$$u, v \varepsilon \mathrm{Cls}'\mathrm{R} . \exists u . \exists v : \supset : \mathrm{l}'u = \mathrm{l}'v . = . \theta u = \theta v \qquad \mathrm{Df}$$

« Si u et v sont des classes non nulles de nombres rationnels positifs, dire que la limite supérieure des u est égale à celle des v, c'est dire que les classes θu et θv sont égales (identiques). » C'est là une définition par abstraction, qui consiste à définir, non pas le symbole l'u en fonction de symboles connus, mois seulement l'*égalité* de deux tels symboles. On définit ensuite les nombres réels positifs (Q) comme suit :

$$\mathrm{Q} = \mathrm{l}'[\mathrm{Cls}'\mathrm{R} \frown u \ni (\exists u . \exists \mathrm{R}\text{-}\theta u)] \qquad \mathrm{Df}$$

« Un nombre réel est la limite supérieure d'une classe non nulle de nombres rationnels u, telle qu'il y a des nombres rationnels non inférieurs à quelque u[1]. »

Il importe de remarquer que cette formule définit en bloc tous les nombres réels (et non pas seulement les nombres irrationnels) comme limites supérieures d'ensembles de rationnels. Si l'on veut faire rentrer l'ensemble des nombres rationnels dans le nouvel ensemble des nombres réels. il faut recourir à une nouvelle définition, qui fixe l'égalité et l'inégalité d'un nombre rationnel par rapport à une limite supérieure :

$$u \varepsilon \mathrm{Cls}'\mathrm{R} . a \varepsilon \mathrm{R} . \supset : a < \mathrm{l}'u . = . a \varepsilon \theta u \qquad \mathrm{Df}$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \supset : a = \mathrm{l}'u . = . \theta a = \theta u \qquad \mathrm{Df} .$$

« Si a est un nombre rationnel et u un ensemble de nombres rationnels, dire que a est inférieur à l'u, c'est dire que a est inférieur à quelque u ; et dire que a est égal à l'u, c'est dire que les classes θa et θu sont égales (identiques). » Il en résulte

1. C'est-à-dire : « qui ne contient pas tous les nombres rationnels ».

que a est la limite supérieure du segment θa, c'est-à-dire de l'ensemble des nombres rationnels plus petits que lui. Mais, on le voit, c'est moyennant une convention qui identifie un nombre rationnel à une limite supérieure. Sans elle, rien ne permet d'affirmer que le nombre rationnel a est la limite supérieure des nombres rationnels inférieurs à lui. Or les deux définitions précédentes sont défectueuses, car ce sont encore des définitions par abstraction : elles ne définissent ni a ni $l'u$, mais leur égalité ou inégalité. Et ce qu'il y a de plus grave, c'est qu'elles établissent ces relations entre des notions déjà définies séparément. En vertu de la définition de la limite supérieure, on a :

$$\theta a = \theta u \,.=.\, l'a = l'u$$

et, en rapprochant cette égalité de celle-ci : $a = l'u$, on en conclut immédiatement : $a = l'a$, ce qui est une autre forme de la même convention. Rien ne justifie cette identification du nombre rationnel a à une limite supérieure quelconque, fût-ce à celle de l'ensemble formé du seul nombre rationnel a.

Mais, d'autre part, la limite supérieure n'ayant été définie que par abstraction, rien ne permet d'affirmer l'existence ni l'unicité de cette entité nouvelle. Pour cela, il faudrait en avoir une définition nominale. Or, puisque l'égalité $l'u = l'v$ équivaut à l'égalité $\theta u = \theta v$, et qu'elle n'a même pas d'autre sens, il est tout naturel de poser par définition :

$$l'u = \theta u$$

c'est-à-dire de supprimer la notion de la limite supérieure et de considérer uniquement les segments. En effet, quel que soit l'ensemble u, on a :

$$\theta u = \theta\theta u,$$

c'est-à-dire que l'ensemble θu est un segment. On est ainsi conduit à identifier le nombre irrationnel au segment dont il est la limite supérieure, et plus généralement, à concevoir tous les nombres réels comme des segments de nombres rationnels, ce qui est la théorie de M. Russell. Seulement alors il ne faut

plus poser la définition :

$$a = \text{l}'u \,.\, = .\, \theta a = \theta u$$

c'est-à-dire identifier un nombre rationnel à une limite supérieure, car on serait amené à l'identifier à l'ensemble des nombres rationnels plus petits que lui ($a = \text{l}'u \,.\, \text{l}'u = \theta u \,.\, \theta u = \theta a \,.\, \supset \,.\, a = \theta a$). Ou bien il faut entendre par a, non plus le nombre rationnel a, mais le nombre réel a qui lui correspond. C'est ainsi, en particulier, qu'on pourra dire que le nombre *réel* 1 est l'ensemble θ des nombres *rationnels* plus petits que 1 (nombre *rationnel*) [1].

Bien que la définition formelle de la limite supérieure exclue le cas où la classe considérée comprend la totalité des nombres rationnels, on est conduit, par une généralisation naturelle et légitime, à concevoir l'*infini* comme la limite supérieure de l'ensemble des nombres rationnels (ou mieux comme cet ensemble même, ce qui supprime la question d'existence). Il importe de remarquer que c'est là l'infini comme *nombre réel*, distinct de l'infini *rationnel* (rapport d'un nombre entier non nul à 0) et de l'infini *entier* (nombre cardinal α_0 ou nombre ordinal ω); de même que le *zéro réel* (limite inférieure des nombres rationnels positifs non nuls) se distingue du *zéro rationnel* (rapport du zéro entier à un nombre entier non nul) et du *zéro entier*. Toutes ces distinctions sont analogues à celles que nous avons établies entre les divers nombres 1, et tout aussi justifiées.

Mais, d'autre part, comment s'expliquer la confusion constante et traditionnelle qui s'est établie entre ces diverses généralisations du nombre, qui ne sont même pas, à vrai dire, des nombres, ce terme devant, semble-t-il, être réservé aux nombres entiers ? Il ne suffit pas d'invoquer le soi-disant *principe de permanence* de Hankel, qui d'abord est faux, attendu que

1. *Formulaire de Mathématiques* (1903), § 42; cf. Peano, *Sui numeri irrazionali* (*Revue de Mathématiques*, t. VI, p. 126-140), où l'on trouve de nombreuses indications historiques et bibliographiques sur cette question, et le résumé des principales théories proposées.

les opérations arithmétiques ne conservent pas, d'une espèce à l'autre, *toutes* leurs propriétés, et qui, fût-il vrai, n'aurait que la valeur d'un motif esthétique d'analogie et pour ainsi dire de sentiment[1]. Il ne suffit pas non plus de dire, avec M. RUSSELL, que les mathématiciens ont, en vertu du caractère formel de leur science, une tendance invincible à identifier deux ordres d'entités entre lesquels ils découvrent ou établissent une correspondance univoque et réciproque. La vraie raison est la suivante : toutes les espèces de nombres ont ceci de commun, qu'elles servent à la mesure des grandeurs, et c'est pourquoi on les appelle toutes du même nom. Le nombre est, au sens le plus général, le symbole d'une grandeur, ou plutôt du rapport de deux grandeurs (d'une grandeur quelconque à l'unité de grandeur de son espèce)[2]. C'est là, en tout cas, l'origine *historique* de la généralisation du nombre. Les nombres irrationnels étaient inconnus d'EUCLIDE, et ce qui lui en tenait lieu, c'était les rapports de grandeurs (livre X des *Éléments*). Par conséquent, ce qu'on appelle le continu numérique est né, *historiquement*, du continu géométrique, notamment du fait des grandeurs incommensurables. Mais il faut se garder de tirer de là des conclusions contraires à l'*apriorité* des Mathématiques pures. D'ailleurs, lors même que le continu numérique serait dérivé du continu géométrique, il ne s'ensuivrait pas qu'il procède en quoi que ce soit de l'intuition spatiale (pure ou empirique, peu importe ici). En effet, le continu géométrique n'est pas et ne peut pas être un objet d'intuition. On parle quelquefois du *continu physique* comme du modèle (imparfait) d'après lequel l'esprit humain aurait créé le continu mathématique; mais il n'y a pas, il ne saurait y avoir de continu physique. Ce que l'on appelle ainsi, c'est (tout au plus) des suites *compactes* de points, analogues à l'ensemble des nombres rationnels. Or, en admettant même (ce qui est déjà excessif) qu'une suite compacte soit donnée dans l'intuition, rien

1. PEANO, *Principio de permanentia*, ap. *Revue de Math.*, t. VIII, p. 84.
2. C'est ainsi que NEWTON le définit au début de son *Arithmetica universalis*.

n'oblige ni même n'autorise à compléter une telle suite par des points irrationnels, de manière à la rendre continue. Jamais aucune expérience ni aucune mesure ne nous révélera un point irrationnel ou une grandeur incommensurable. De telles notions ne peuvent donc être qu'*a priori*, et indépendantes de toute intuition.

§ B. — Définition du continu.

Cette conclusion, qui nous paraît déjà suffisamment établie par les arguments négatifs qui précèdent, se trouve confirmée par un argument positif péremptoire, qui est que l'on peut construire logiquement et de toutes pièces la notion du continu, non seulement sans invoquer le continu géométrique, mais même sans faire appel à l'idée de grandeur, uniquement avec des considérations d'*ordre*. C'est là une des conquêtes les plus importantes de la philosophie des Mathématiques ; nous avons déjà eu l'occasion de la signaler[1], mais M. Russell en a fait ressortir toute l'importance en l'incorporant à son système. En deux mots, elle consiste en ceci, qu'on peut (et qu'on doit même) définir le continu d'une manière purement *ordinale*, sans faire intervenir aucune notion *métrique* (de grandeur ou de distance).

C'est à M. Georg Cantor qu'appartient le double mérite, d'abord, d'avoir donné la première définition logique et précise du continu, ensuite, de l'avoir dégagée de toute considération de grandeur. Pour bien comprendre la définition *ordinale* du continu, il faut partir de la définition *métrique* qui en a été donnée en premier lieu[2]. Aux termes de celle-ci, un ensemble continu est un ensemble *parfait* et *bien enchaîné* (*zusammenhängend*). Rappelons brièvement la définition de ces attributs. Un ensemble E de points (ces *points* n'étant pas autre chose

1. *Sur la définition du continu*, ap. *Revue de Métaphysique et de Morale*, t. VIII, p. 157-168 (mars 1900).

2. G. Cantor, *Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre*, ap. *Math. Annalen*, t. XXI (1883).

que des valeurs numériques) a pour point-limite un point x (appartenant *ou non* à l'ensemble), si dans le voisinage de x il y a une infinité de points appartenant à E, c'est-à-dire, plus rigoureusement, si, étant donné un nombre ε, si petit qu'il soit, il existe au moins un point de E dont la distance à x soit moindre que ε. Un ensemble *parfait* est un ensemble qui contient tous ses points-limites, et dont tous les points sont des points-limites; en d'autres termes, puisqu'on appelle *dérivé* d'un ensemble l'ensemble de ses points-limites, un ensemble parfait est un ensemble identique à son dérivé : il le contient et y est contenu à la fois. D'autre part, un ensemble E est dit *bien enchaîné*, si, étant donnés deux points quelconques de E, p_0 et p, on peut trouver dans E une suite de points : p_1, p_2,... p_n (en nombre fini n) telle que les distances de deux points consécutifs, à savoir : p_0p_1, p_1p_2,... p_np, soient toutes inférieures à un nombre donné ε, et cela si petit que soit ce nombre (il est clair que, plus ε est petit, plus n grandit, mais il ne doit pas cesser d'être fini).

On voit que les deux attributs qui servent à définir le continu impliquent l'idée de grandeur ou de distance. En outre, cette définition de la continuité est essentiellement *relative* : on ne définit en effet un ensemble continu que par rapport à un autre ensemble, *déjà continu* (qu'on appelle métaphoriquement l'*espace*), où il est supposé plongé, et où il peut posséder des points-limites *qu'il ne contient pas*. Par suite, cette définition de l'ensemble continu présupposait la notion générale d'*espace continu*, c'est-à-dire une autre notion, antérieure et absolue, de la continuité. Or il se trouve que la définition *absolue* du continu au moyen de ses propriétés intrinsèques est en même temps affranchie de toute considération de grandeur, et implique uniquement des relations d'ordre. C'est cette définition *ordinale* qu'il nous reste à exposer [1].

1. G. Cantor, *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*, ap. *Math. Annalen*, t. 46 (1895) et 49 (1897); trad. par Marotte sous le titre : *Sur les fondements de la théorie des ensembles transfinis* (Paris, Hermann, 1899). — Toutefois, nous devons mentionner que, dès 1894, M. Enriques donnait une définition purement ordinale de la continuité de la ligne

De même que la définition des nombres irrationnels repose sur la considération des nombres rationnels, la définition ordinale du continu repose sur la considération d'un ensemble *semblable* à l'ensemble des nombres rationnels, c'est-à-dire possédant les mêmes propriétés ordinales. Ces propriétés sont les suivantes :

1° C'est un ensemble dénombrable ;

2° Il n'a ni premier ni dernier terme ;

3° Il est *compact*, c'est-à-dire qu'entre deux termes quelconques il y en a un autre.

Ces trois propriétés sont purement ordinales ; car la première (la seule pour laquelle cela n'est pas évident) équivaut à ceci : « l'ensemble peut être rendu semblable à une *progression* » ; or on a défini la progression indépendamment de l'idée de nombre cardinal[1]. Ces propriétés définissent le *type d'ordre* η de l'ensemble des nombres rationnels, et par suite de tout ensemble semblable à celui-là[2].

Dans l'ensemble η ainsi défini, on peut considérer ce que M. Cantor appelle des *suites fondamentales* ascendantes ou descendantes. Une suite fondamentale est une *progression* (du type d'ordre ω) dont les termes se suivent dans le même ordre que dans l'ensemble η, auquel cas elle est dite *ascendante*, ou dans l'ordre inverse, auquel cas elle est dite *descendante*. On peut se borner à considérer les suites fondamentales ascendantes, et cela sera sous-entendu désormais. Une suite fondamentale S a une *limite*, si dans l'ensemble η il y a un terme qui est le premier après tous les termes de S. Autrement dit, un terme x est la limite de la suite fondamentale S, si tous les termes de S sont inférieurs (antérieurs) à x, et si chaque terme

droite : *Sui fondamenti della Geometria projettiva*, postulat VII, ap. *Rendiconti del R. Istituto Lombardo*, ser. II, vol. XXVII.

1. Comme le remarque M. Russell, ces trois propriétés sont relatives à deux manières différentes d'ordonner les nombres rationnels : les deux dernières les supposent rangés par ordre « de grandeur », tandis que la première les suppose rangés sous forme de progression (*op. cit.*, § 278).

2. Le *type d'ordre* étant, par définition, le concept obtenu par l'abstraction effectuée sur tous les ensembles *semblables* à un même ensemble, ou, en extension, la classe de ces ensembles.

supérieur (postérieur) à tous les termes de S est supérieur (postérieur) à x. Cela posé, on dit qu'un ensemble est *parfait*, si toutes ses suites fondamentales ont des limites, et si tous ses termes sont des limites de suites fondamentales.

On remarquera que la notion de *limite*, et par suite celle de *parfait*, sont maintenant définies d'une manière purement ordinale, et de plus intrinsèque, c'est-à-dire sans considérer aucun élément extérieur à l'ensemble en question. Mais l'attribut de *parfait* ne suffit pas encore à définir un ensemble continu : il faut y ajouter ce fait, que cet ensemble contient un ensemble du type d'ordre η. On est ainsi amené à la définition suivante du type d'ordre θ du continu linéaire :

« L'ensemble θ est parfait, et contient un ensemble dénombrable E tel qu'entre deux termes de θ il y a au moins un terme de E. »

Cette définition est suffisante, car on peut démontrer que l'ensemble E caractérisé par ces trois propriétés (d'être dénombrable, d'être contenu dans un ensemble parfait, et d'avoir un terme entre deux termes quelconques de celui-ci) possède le type d'ordre η.

On remarquera l'analogie de cette définition du continu avec celle des nombres irrationnels. On peut rendre cette analogie plus étroite encore en substituant les segments aux suites fondamentales dans la définition du continu. Étant donné un ensemble E ordonné du type d'ordre η, c'est-à-dire dénombrable et compact, on peut y définir des *segments*, comme dans l'ensemble des nombres rationnels. Un segment sera un ensemble S qui contient quelques termes de E, mais non tous, qui ne contient pas de dernier terme, et qui contient tous les termes de E qui précèdent un terme quelconque de S. Cette définition est, comme on voit, purement ordinale. Or chaque segment contient virtuellement une infinité de suites fondamentales ayant pour limite sa propre limite supérieure. Dire que toute suite fondamentale a une limite, c'est dire que tout segment a une limite supérieure ; et comme cette limite supérieure doit, par hypothèse, être contenue dans l'ensemble total (où

l'ensemble E se trouve compris), c'est dire que cet ensemble total est semblable à l'ensemble des nombres réels, et par conséquent continu.

M. Whitehead a simplifié cette définition en la remplaçant par la définition équivalente que voici : « Une suite est con-



Fig. 1.

tinue : 1° quand elle a un premier et un dernier terme, et quand tous ses segments (tant supérieurs qu'inférieurs) ont une limite ; 2° quand elle contient une suite dénombrable compacte telle qu'il y ait un terme de celle-ci entre deux termes quelconques de la première [1] ».

Pour montrer la différence des deux définitions de la continuité (la définition ordinale et la définition métrique), il suffit d'analyser quelques exemples simples. Considérons d'abord l'ensemble des nombres réels compris entre 0 et 2 ; il est figuré par le segment 0 —2, c'est-à-dire par un ensemble de points linéaire et continu (fig. 1). Coupons ensuite ce segment immé-

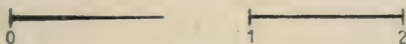


Fig. 2.

diatement avant le point 1, et séparons les deux tronçons : l'un composé de tous les points compris entre 0 *inclus* et 1 *exclu*, l'autre composé de tous les points compris entre 1 et 2 *inclus* (fig. 2). L'ensemble des deux tronçons ne sera plus continu au sens métrique, puisqu'il n'est plus bien enchaîné : il y a une distance finie entre le point 1 et l'un quelconque des points (de l'ensemble) situés à sa gauche. Mais il sera encore continu au sens ordinal, car le point 1 est toujours la limite (au sens ordinal) des points qui le précèdent, il est toujours (dans l'ensemble) le *premier* après tous les points du premier

1. Russell, *op. cit.*, p. 299, note.

tronçon [1]. Au lieu de considérer des points que nous déplaçons dans l'espace, c'est-à-dire une image géométrico-physique, nous pourrions considérer des nombres purs et fixes : l'ensemble des nombres réels compris entre 0 inclus et 1 exclu, et entre 2 et 3 inclus, est continu au sens ordinal sans l'être au sens métrique : car s'il y a un intervalle fini (> 1) entre le nombre 2 et chacun de ceux qui le précèdent, il n'en est pas moins le *premier* après ceux-ci, et il est leur limite ordinale, au même titre que le point 1 est leur limite métrique. On voit par ces exemples quelle est la différence essentielle entre les deux continuités : la continuité ordinale est *intrinsèque*, elle repose uniquement sur les relations internes des éléments de l'ensemble, et ne tient aucun compte des éléments étrangers; tandis que la continuité métrique est relative à la *situation* de l'ensemble considéré au sein d'un autre ensemble, qui est continu, et dont les éléments entrent en considération. La continuité ordinale est donc la seule primitive et absolue.

On pourrait imaginer des ensembles plus compliqués, qui seraient continus au sens ordinal tout en étant absolument discontinus au sens métrique. Voici un procédé très général et très simple pour construire de tels ensembles. Concevons que tous les nombres réels compris entre 0 et 1 soient écrits dans le système binaire, c'est-à-dire sous forme de nombres « bimaux » dont les chiffres seront tous 0 ou 1 ; on a évidemment ainsi un ensemble continu (tant au sens métrique qu'au sens ordinal). Lisons maintenant tous ces nombres dans le système décimal (ou dans tout autre système de numération non binaire); leur ensemble cesse d'être continu au sens métrique, puisque alors le segment (0—1) comprend d'autres nombres *décimaux* (par exemple ceux qui contiennent 2 parmi leurs chiffres *décimaux*); mais il reste continu au sens ordinal, attendu que l'ordre relatif des nombres (ou des points correspondants) est resté exactement le même [2]. En réalité, cette

1. Ce tronçon n'est pas continu, mais *semi-continu*, dans le style de M. Cantor, car il lui manque un point-limite (qui est 1).
2. Cette méthode est due à M. Peano, *Rivista di Matematica*, t. II, p. 41.

transformation, qui fait image, représente une correspondance purement statique établie, par l'intermédiaire des nombres indiqués, entre deux ensembles de valeurs ou de points dont l'un constitue l'intervalle continu (0,1) et dont l'autre au contraire ne comprend qu'une partie des points de cet intervalle [1]. Néanmoins, celui-ci est tout aussi continu que l'autre au point de vue ordinal, puisque l'ordre de ses éléments est le même : si un nombre (ou plutôt : une expression numérique) est supérieur à un autre dans le système binaire, il lui est aussi supérieur dans le système décimal, et réciproquement [2].

Les définitions précédentes du continu ne sont guère intuitives, il faut en convenir. Néanmoins, elles suffisent à fonder non seulement l'Analyse, mais même la Géométrie. C'est là un fait extrêmement important, et de grande conséquence en philosophie, que le continu géométrique puisse se réduire au continu *numérique* qu'on vient de définir. Ce fait réfute définitivement toutes les doctrines qui considèrent la notion du continu comme provenant de l'intuition sensible, et comme réfractaire à l'entendement.

On verra en Géométrie des définitions plus simples et plus intuitives du continu (par exemple de la continuité de la ligne droite), mais ces définitions seront exactement équivalentes aux précédentes, et leur simplicité relative vient du fait qu'un certain nombre des conditions de la continuité se trouvent impliquées déjà dans la définition de la ligne droite.

Voir Schönflies, *Bericht über die Mengenlehre*, ap. *Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung*, t. VIII, n° 2, p. 64, 98, 102 (1900).

1. Il est même *nulle part dense* dans cet intervalle. On a ainsi une correspondance biuniforme entre un ensemble continu (donc *partout dense*) et un ensemble nulle part dense, de telle sorte qu'ils sont *semblables*. Une telle correspondance a été découverte par Harnack (*Math. Annalen*, t. 23).

2. Les nombres qui n'ont qu'un nombre fini de chiffres « bimaux » ont deux expressions, dont l'une ne comprend que des zéros à partir d'un certain rang, tandis que l'autre ne comprend que des 1 à partir du même rang. Pour rendre la correspondance biuniforme, il convient de supprimer une de ces expressions, par exemple celle qui contient une infinité de 1. Cette remarque met en évidence la discontinuité *métrique* de l'ensemble des nombres décimaux correspondants : car cet ensemble ne contient manifestement aucun point compris entre les 2 points qui correspondent à deux expressions bimales équivalentes, comme par exemple : 0,01111 .... et 0,1000..... (c'est-à-dire, dans le système décimal, entre 0,02 et 0,1).

CHAPITRE V

L'IDÉE DE GRANDEUR

La conception traditionnelle des Mathématiques, qui a régné jusqu'au milieu du XIXe siècle, faisait de la grandeur l'objet essentiel de cette science; le nombre lui-même était considéré comme une espèce de grandeur, la grandeur discrète, par opposition à la grandeur continue. Depuis lors, c'est devenu un dogme universellement accepté, que la Mathématique pure repose entièrement et uniquement sur l'idée de nombre, et même de nombre entier. Or nous avons vu, d'une part, que l'idée d'ordre est un objet de la Mathématique pure, et qu'elle est irréductible à l'idée de nombre, puisque celle-ci (en tant que nombre cardinal) ne contient aucune considération d'ordre; et, d'autre part, que les nombres en tant qu'objets de la Mathématique pure peuvent se réduire à leurs propriétés *ordinales*, et que le continu lui-même, qui semblait l'attribut caractéristique de la grandeur, peut se définir d'une manière purement ordinale. Il semble donc que l'objet essentiel ou principal de la Mathématique pure soit, non plus l'idée de grandeur ni l'idée de nombre, mais plutôt l'idée d'ordre, et que celle-ci ait détrôné les deux autres, qui ont si longtemps occupé le premier rang. Dans tous les cas, il y a un résultat certain, c'est que l'on peut concevoir et définir le continu sans aucune considération de grandeur : et c'est pour mieux marquer cette indépendance que nous avons traité la notion du continu avant celle de la grandeur. Selon M. Russell, l'idée de grandeur serait inutile et même étrangère à la Mathématique pure, parce

qu'on ne pourrait pas la définir sans quelque appel à l'intuition ; ou du moins, on ne pourrait la définir que *par postulats*, ce qui ne permettrait pas d'affirmer l'existence de l'objet défini ; cette existence ne pourrait être donnée que par l'expérience [1]. Pour comprendre et apprécier cette thèse paradoxale, il convient d'exposer la théorie de la grandeur de M. Russell.

§ A. — Définition de la grandeur.

Il y a d'abord une distinction capitale à établir entre la *grandeur* et la *quantité*. La grandeur est la quantité abstraite, la quantité est la grandeur concrète ; la première est ce qu'on appelle un état de grandeur, la seconde est l'objet lui-même auquel on attribue cet état. Ces deux notions sont constamment confondues dans le langage et dans l'usage, de même que sont confondus, en général, le sens concret et le sens abstrait d'un même terme [2]. Il n'en est que plus utile de les distinguer soigneusement ; et cette distinction a une grande importance théorique. En effet, on conçoit fréquemment les *grandeurs* comme pouvant être égales aussi bien qu'inégales (c'est même une des façons banales de définir la grandeur) ; or, au point de vue logique, des grandeurs *différentes* ne peuvent pas être égales ; ce qu'on nomme vulgairement des grandeurs *égales*, ce sont des quantités *égales*, c'est-à-dire qui possèdent *la même* grandeur. Seul, l'empirisme peut refuser d'admettre que, si deux objets sont *égaux*, c'est en tant qu'ils représentent et incarnent une même grandeur abstraite. Mais, du moment qu'on admet entre quantités concrètes une relation symétrique

1. On pourrait croire que la même objection vaut contre les diverses espèces de nombres que nous avons définies précédemment. Ce serait une erreur, car les définitions que nous en avons données étaient toutes *nominales*, et montraient par suite immédiatement l'existence de l'objet défini. On a vu que c'est précisément pour cela que M. Russell a choisi les définitions de cette forme.

2. La rougeur et une rougeur, la longueur et une longueur (de sorte qu'on pourrait dire : la longueur d'une longueur). Une langue artificielle comme l'*Esperanto* permet de faire cette distinction logique, inconnue des langues naturelles, parce qu'elle est inconnue du vulgaire.

et transitive appelée *égalité*, on peut, en vertu du *principe d'abstraction*, la ramener à une identité de relation. Le terme unique auquel toutes les quantités égales seront alors rapportées sera par définition leur *grandeur* commune, et ainsi leur égalité se réduira à une *identité de grandeur*.

Cette distinction permet de décider entre deux théories de la grandeur que M. Russell appelle la théorie relativiste et la théorie absolutiste. Dans la théorie relativiste, les grandeurs sont susceptibles des deux relations d'égalité et d'inégalité, ou plus précisément des trois relations : *égal à* (=), *plus grand que* (>), *plus petit que* (<). Cette théorie a besoin pour se constituer des *huit* axiomes suivants (A, B, C étant des grandeurs d'une même espèce) :

I. Ou $A = B$, ou $A > B$, ou $A < B$ (les 3 cas étant disjoints).

II. Il y a une grandeur B égale à A, quelle que soit A.

III. Si $A = B$, on a : $B = A$.

IV. Si $A = B$, et $B = C$, on a : $A = C$.

V. Si $A > B$, on a : $B < A$.

VI. Si $A > B$ et $B > C$, on a : $A > C$.

VII. Si $A > B$ et $B = C$, on a : $A > C$.

VIII. Si $A = B$ et $B > C$, on a : $A > C$.

De ces axiomes on peut déduire qu'une grandeur peut toujours être substituée à une grandeur égale dans une égalité ou une simple inégalité [1], et que l'on a : $A = A$ pour n'importe quelle grandeur A. Cela fait présumer que l'égalité de grandeur n'est en réalité qu'une identité, et c'est ce que le *principe d'abstraction* permet d'affirmer. Le bon sens confirme cette conclusion : il est raisonnable d'admettre que les grandeurs égales ont en commun quelque chose de plus que les autres grandeurs de la même espèce, qui leur sont inégales; et il est

1. On sait que cette propriété (possibilité de substitution) était pour Leibniz la définition de l'égalité logique ou identité : « Eadem sunt, quorum unum in alterius locum substitui potest salva veritate. » (*Phil. Schriften*, t. VII, p. 219.) Mais le *principe de la substitution des équivalents* n'est pas plus un axiome en Mathématique qu'en Logique (cf. p. 12, note 1, et p. 107, note 1).

paradoxal de soutenir que deux grandeurs égales ne diffèrent de deux grandeurs inégales que par le fait même de la relation extrinsèque qui les unit : égalité pour les premières, inégalité pour les secondes. LEIBNIZ eût dit que c'est contraire au *principe de raison*, suivant lequel toutes les relations d'un objet doivent avoir leur fondement dans ses propriétés intrinsèques. Mais ce principe de raison est trop général et trop vague, et il est remplacé avec avantage par le principe d'abstraction [1].

La théorie absolutiste doit donc être préférée, d'autant plus que, comme on va le voir, elle repose sur des principes plus simples et réalise une notable économie de postulats. Dans cette théorie, répétons-le, deux grandeurs ne peuvent pas être *égales*, ou alors elles sont *identiques* (cette thèse est parfaitement conforme à la thèse analogue en Arithmétique, suivant laquelle il n'y a pas de *nombres égaux*, mais bien *le même nombre* incarné dans des collections différentes) [2]. Par conséquents, deux grandeurs différentes sont nécessairement inégales ; et cette relation d'inégalité sert à caractériser les grandeurs d'une même espèce : deux grandeurs sont *de même espèce*, quand l'une peut être dite plus grande ou plus petite que l'autre. Les axiomes nécessaires pour constituer cette théorie sont au nombre de *quatre* seulement, à savoir :

I. Aucune grandeur n'est plus grande ou plus petite qu'elle-même.

II. De deux grandeurs A, B (différentes), ou bien $A > B$, ou bien $A < B$.

III. Si $A > B$, on a : $B < A$.

IV. Si $A > B$ et $B > C$, on a : $A > C$.

On voit à quoi tient la plus grande simplicité de ce système : c'est que tous les axiomes relatifs à l'égalité en ont disparu, et cela se comprend, puisque dans cette théorie l'égalité n'est

1. En vertu de ce principe, une grandeur est (au point de vue de l'extension) une classe de quantités égales, et (au point de vue de la compréhension) l'état commun de toutes ces quantités (leur qualité commune).

2. Cf. HÖLDER, *die Axiome der Quantität und die Lehre vom Mass*, p. 4, note 1 ; ap. *Berichte der kön. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig*, math.-phys. Classe, t. 53 (1901).

pas une relation originale et indéfinissable, mais simplement l'égalité logique ou identité [1]. Quant à l'inégalité, seule notion indéfinissable de cette théorie, elle se trouve définie implicitement par ses propriétés : c'est une relation asymétrique transitive (en vertu des axiomes III et IV).

Nous avons défini en passant ce qu'on appelle une *espèce* de grandeurs, en disant que deux grandeurs sont *de même espèce*, si l'une est plus grande que l'autre. C'est là une définition par abstraction qui est insuffisante. Mais, toujours en vertu du principe d'abstraction, il doit exister un terme commun auquel toutes les grandeurs d'une même espèce sont rapportées, et c'est leur relation à ce terme qui permet de dire qu'elles sont de cette espèce particulière. C'est là un nouvel *axiome* de la présente théorie. La relation d'une grandeur particulière à son espèce est la relation d'un individu à une classe à laquelle il appartient, ou (en compréhension) au concept sous lequel on peut le subsumer [2]. Toutes les espèces de grandeur, à leur tour, peuvent être subsumées sous le concept général de *grandeur*, et sont des individus de la classe *grandeur*. Celle-ci est donc une classe du second ordre (une classe de classes) par rapport aux grandeurs particulières.

Il reste à formuler un dernier axiome, qu'on peut appeler le *principe des indiscernables* appliqué aux grandeurs. Il peut s'énoncer ainsi : « Deux grandeurs (différentes) de même espèce ne peuvent coexister dans les mêmes relations entre les mêmes termes ». Autrement dit, puisque les grandeurs concrétisées dans l'espace et dans le temps se nomment des *quantités*, une même quantité ne peut correspondre à deux grandeurs différentes de la même espèce; ou encore, la relation d'une quantité à la grandeur correspondante est *uniforme* : chaque quantité détermine d'une manière univoque la grandeur cor-

1. C'est ce qui justifie l'emploi du même signe (=) pour les deux égalités. Cf. p. 49, note 4.

2. C'est en ce sens qu'il faut interpréter les locutions comme : *une grandeur de plaisir*. Il n'y a pas là deux objets, un plaisir et une grandeur, mais un seul objet, à savoir un plaisir qui est une grandeur de l'espèce plaisir (Russell, *op. cit.*, § 163).

respondante, et cela se comprend, puisque cette grandeur est tirée par abstraction de cette quantité.

La théorie que nous venons d'exposer est très générale : elle porte sur toutes les espèces de grandeurs, aussi bien intensives qu'extensives, par le fait même qu'elle n'implique entre les grandeurs de même espèce qu'une seule relation, celle d'inégalité. Or, comme le remarque M. Russell, on considère habituellement les grandeurs comme caractérisées par deux propriétés : l'inégalité d'une part, et la divisibilité d'autre part. De ces deux propriétés, l'inégalité est la plus générale, car ce qui distingue les grandeurs intensives des extensives, c'est justement qu'elles soutiennent entre elles des relations d'inégalité sans être divisibles, sans que les plus grandes puissent être conçues comme contenant les plus petites ou comme composées par l'addition des plus petites (que l'on pense, par exemple, aux degrés de température) [1]. On pourrait définir les grandeurs intensives : celles qui sont susceptibles d'inégalité, mais non d'addition; et les grandeurs extensives : celles qui sont susceptibles à la fois d'inégalité et d'addition. Or, tandis que dans les grandeurs intensives la relation d'inégalité est nécessairement prise comme indéfinissable, dans les grandeurs extensives elle peut se définir au moyen de l'addition. On peut donc faire une théorie différente et spéciale pour les grandeurs extensives, qui sont les grandeurs proprement mathématiques. C'est cette théorie que nous allons maintenant exposer [2].

1. Rigoureusement parlant, on doit dire, avec M. Russell (*op. cit.*, § 162), qu'aucune grandeur n'est divisible : chaque grandeur est un tout unique. Quand on dit qu'une grandeur est divisible, on veut dire qu'elle est égale à la somme de plusieurs grandeurs de la même espèce. La divisibilité revient donc au fond à l' « addibilité ».

2. D'après les travaux de M. Burali-Forti : *Formulaire de Mathématiques*, t. I, ch. iv : Théorie des grandeurs (1895) [il est à remarquer que cette théorie est absente des éditions ultérieure du *Formulaire*]; *Les propriétés formelles des opérations algébriques*, ap. *Revue de Mathématiques*, t. VI, p. 141-177 (1900); *Sulla Teoria generale delle Grandezze e dei Numeri*, ap. *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino*, t. XXXIX (1904).

§ B. — Théorie des grandeurs extensives.

On considère une classe G, et une opération qui, effectuée sur deux éléments de cette classe, produit un élément de cette classe (identique ou non à l'un des deux premiers). Pour élucider cette notion d'opération, il suffit de dire qu'une opération *binaire* (comme celle dont il est question ici) est une relation *ternaire* qui à deux éléments de la classe fait correspondre un élément de la même classe. Bien entendu, ce dernier élément, appelé *résultat* de l'opération, est déterminé d'une manière univoque, c'est-à-dire qu'il est unique pour chaque couple d'éléments donnés. On dit alors que la classe G est une classe *homogène* par rapport à l'opération considérée. Nous pourrions continuer à raisonner *in abstracto* sur cette opération et sur ses propriétés formelles, en la représentant par un symbole spécial[1]; mais, pour simplifier les écritures et les énoncés, et rendre la lecture plus facile, nous appellerons cette opération *addition*, son résultat *somme*, et nous représenterons la somme des deux grandeurs a et b par le symbole connu $a + b$. Seulement il ne faut pas oublier qu'il s'agit de grandeurs, et non de nombres, et que l'opération $+$, bien distincte de l'addition arithmétique, est uniquement définie par les propriétés formelles que nous allons énoncer. Notre exposition gagnera ainsi en clarté ce qu'elle perdra en généralité et en pureté théorique.

On peut étendre le sens et l'usage du symbole $+$, en le faisant porter, non plus sur des individus ou éléments, mais sur des classes. Soient u, v deux classes de grandeurs G; $(u + v)$ représentera la classe des grandeurs obtenues en additionnant une quelconque des grandeurs u et une quelconque des grandeurs v. En particulier, si a est une grandeur individuelle, $(a + v)$ désignera l'ensemble des sommes de a et des diverses grandeurs v; et $(u + a)$, l'ensemble des diverses grandeurs u

1. Comme fait M. Burali-Forti dans le dernier des ouvrages cités, que nous suivons d'ailleurs dans cet exposé.

et de a. En outre, jusqu'à preuve du contraire, on doit supposer que les « sommandes » ont un ordre déterminé et ne peuvent pas être échangés ; autrement dit, que la somme de a et de b peut n'être pas égale (identique) à la somme de b et de a. Cela est évident, étant donnée l'indétermination formelle de l'opération en question, qui peut n'être pas symétrique.

On définit alors dans la classe G l'*élément nul* (ou les éléments nuls) par rapport à l'opération +; nous le représenterons par 0 (par analogie avec le nombre 0, dont la grandeur nulle est néanmoins bien distincte). Voici cette définition :

$$0 = \mathrm{G} \frown x \ni (y \,\varepsilon\, \mathrm{G} \,.\, \supset .\, x + y = y) \qquad \mathrm{Df}$$

« Zéro est une grandeur x telle que la somme de x et d'une grandeur quelconque y est égale à y. » C'est, comme on dit, le *module* de l'addition. Il importe de remarquer que cette définition, comme toute définition, n'implique ni l'existence ni l'unicité de l'objet défini ; cette existence et cette unicité devront être la matière de propositions spéciales (postulats ou théorèmes). Pour le moment, 0 est défini comme une classe qui peut être nulle (vide) ou qui peut contenir plusieurs éléments.

On définit ensuite la relation d'*inégalité* entre les grandeurs de la classe G, et cela, comme nous l'avons annoncé, au moyen de l'addition. Plus exactement, on définit d'emblée la classe des éléments inférieurs à un élément donné a, que l'on représente par θa (« plus petit que a ») :

$$a \,\varepsilon\, \mathrm{G} \,.\, \supset .\, \theta a = \mathrm{G} \frown x \ni [a \,\varepsilon\, x + (\mathrm{G}{-}0) \,.\, \smile .\, a \,\varepsilon\, (\mathrm{G}{-}0) + x]$$

« a étant une grandeur de la classe G, θa est l'ensemble des grandeurs x de la classe G telles que a est la somme de x et d'une grandeur G non nulle[1]. » Comme la notion de somme, la notion *plus petit que* s'étend d'un individu à une classe quelconque. Soit u une classe de grandeurs G : θu représentera

1. Cette somme doit être entendue dans un sens quelconque, afin de ne pas impliquer la loi commutative. Cette formule a été corrigée en conséquence par M. Burali-Forti lui-même, d'après M. Huntington : *A complete set of postulates for the theory of absolute continuous magnitude*, ap. *Transactions of the American Mathematical Society* (1902).

la classe des grandeurs plus petites qu'une quelconque des grandeurs u. Comme les autres, cette définition est susceptible d'une expression formelle :

$$u \varepsilon \mathrm{Cls'G} \,.\, \supset .\, \theta u = x \ni [\exists\, u \frown y \ni (x \varepsilon \theta y)] \qquad \mathrm{Df}$$

« u étant une classe de G, θu est l'ensemble des x plus petits que quelque élément y de la classe u [1]. »

Bien entendu, la relation θ n'est définie que par rapport à l'opération désignée par $+$ et dans la classe G. Si la classe G est celle des nombres réels positifs, et si l'opération $+$ désigne leur addition, θx désigne les nombres plus petits que x. Mais si la classe G est celle des nombres entiers, et si l'opération x est la multiplication, θx désignera les sous-multiples de x; et si l'opération $+$ est la division, θx désignera les multiples de x. Cela montre la généralité formelle de ces définitions, que la particularité de nos signes ne doit jamais faire oublier.

Enfin on définit une *classe limitée* de grandeurs G de la manière suivante :

$$\mathrm{Cls\ lim'\ G} = \mathrm{Cls'\ G} \frown u \ni [\exists u \,.\, \exists\, \mathrm{G}-\theta u] \qquad \mathrm{Df}$$

« Une classe limitée de G est une classe de G, u, telle qu'il y a des u, et qu'il existe des grandeurs G non inférieures à un u quelconque. » Quand on aura prouvé que « non inférieur à » équivaut à « supérieur ou égal à », on pourra dire qu'une classe limitée de G est une classe non nulle telle qu'il y a des grandeurs G égales ou supérieures à un u quelconque.

Cela posé, voici comment on définit la notion de grandeur, ou, plus exactement, d'une espèce de grandeurs :

Une *espèce de grandeurs* est une classe G homogène par rapport à une certaine opération $+$, et qui vérifie les huit postulats suivants :

I. $$x, y, z \varepsilon \mathrm{G} \,.\, x + z = y + z \,.\, \supset_{x, y, z} .\, x = y$$

1. Il est inutile de spécifier que ces x sont des G, car cette condition est impliquée dans la définition de θ, et par suite dans la proposition : $x \varepsilon \theta u$, jointe à l'hypothèse : $u \supset \mathrm{G}$.

« Si l'on a, entre grandeurs G, l'égalité : $x+z=y+z$, on a aussi l'égalité : $x=y$[1]. »

II. $\exists 0$

« Il y a (au moins) une grandeur nulle (de l'espèce G). »

III. $\exists \mathrm{G}-0$

« Il y a (au moins) une grandeur G différente de 0[2]. »

IV. $x \varepsilon \mathrm{G}-0 \,.\, y \varepsilon \mathrm{G} \,.\, \supset_{x,y} .\, x+y \varepsilon \mathrm{G}-0$

« La somme de deux grandeurs dont une est non nulle est une grandeur non nulle[3]. »

V. $x, y, z \varepsilon \mathrm{G} \,.\, \supset_{x,y,z} .\, x+(y+z)=(x+y)+z$

« Quelles que soient les grandeurs x, y, z de l'espèce G, la loi associative de l'addition est vérifiée[4]. »

VI. $x, y \varepsilon \mathrm{G} \,.\, \supset_{x,y} : x=y \,.\, \smile .\, x \varepsilon \theta y \,.\, \smile\, y \varepsilon \theta x$

« Quelles que soient les grandeurs x, y de l'espèce G, ou bien x est égal à y, ou bien x est plus petit que y, ou bien y est plus petit que x[5]. »

VII. $x \varepsilon \mathrm{G}-0 \,.\, \supset_x .\, \exists\, \theta x - 0$

« Si la grandeur x n'est pas nulle, il y a une grandeur G plus petite que x et non nulle ». En d'autres termes, il n'y a pas, parmi les grandeurs non nulles, de grandeur minimum.

1. L'implication inverse : $x=y \,.\, \supset .\, x+z=y+z$ est impliquée dans la définition de l'opération $+$ comme opération *uniforme*. On voit ainsi que le prétendu axiome : « Des quantités égales ajoutées à des quantités égales donnent des résultats égaux » fait en réalité partie de la définition de l'addition, et, par suite, de la définition même de la grandeur.

2. On remarquera que les postulats II et III sont des postulats d'existence. Il en est de même des postulats VII et VIII.

3. D'où, par contraposition : « La somme de deux grandeurs n'est nulle que si chacune de ces grandeurs est nulle. »

4. On remarquera que la loi commutative de l'addition ne figure pas parmi les postulats : elle peut se déduire de ceux-ci. Ce perfectionnement est dû à Hölder, *op. cit.*

5. Cette formule a été corrigée par M. Burali-Forti (ap. Huntington, *op. cit.*), pour rendre tous les axiomes indépendants les uns des autres.

VIII. $u \varepsilon \mathrm{Cls\,lim'}\,G \,.\, \supset_u .\, \exists G \frown x \ni (\theta x = \theta u)$

« Si u est une classe limitée de G, il y a une grandeur x telle que $\theta x = \theta u$, c'est-à-dire que l'ensemble des grandeurs plus petites que x est égal (identique) à l'ensemble des grandeurs plus petites qu'un u quelconque. » Ce dernier postulat affirme l'existence d'une limite supérieure x pour toute classe limitée de grandeurs G (et par suite aussi l'existence d'une limite inférieure pour toute classe de grandeurs G non nulles). Comme nous le savons déjà, ce postulat équivaut à affirmer la continuité de l'ensemble des grandeurs G [1].

On peut prouver que ces huit postulats sont absolument indépendants les uns des autres, c'est-à-dire qu'aucun d'eux n'est une conséquence logique des autres, ou que chacun d'eux peut être faux alors que tous les autres sont vrais, ce qui est la forme la plus parfaite d'un système de postulats.

On a vu que le postulat II affirme l'existence d'une grandeur nulle. On démontre aisément, au moyen du postulat I, que cette grandeur nulle est unique. Alors, mais alors seulement, on peut parler de *la* grandeur nulle comme d'un individu.

De l'ensemble des huit postulats énoncés on peut déduire toutes les propriétés d'une classe de grandeurs absolues, y compris zéro [2]. On définit l'inégalité (comme relation de deux grandeurs) de la manière suivante :

$$x, y \,\varepsilon\, G \,.\, \supset : x < y \,.=.\, x \,\varepsilon\, \theta y \qquad \mathrm{Df}$$

1. Il importe de remarquer que la continuité est un attribut, non d'une grandeur particulière, mais d'un ensemble de grandeurs. Quand on dit qu'une grandeur particulière est continue, on veut dire qu'elle appartient à un ensemble continu, ou tout au moins que les grandeurs de la même espèce et plus petites qu'elle forment un ensemble continu.

2. Les six postulats de M. Huntington (*op. cit.*) ne portent que sur un système de grandeurs absolues *différentes de zéro*, de sorte qu'on est obligé de lui adjoindre ensuite la grandeur nulle. Dans son mémoire *Les propriétés formelles...* (comme dans le *Formulaire*, t. I), M. Burali-Forti a eu le soin d'indiquer pour chaque théorème les postulats dont il dépend, ce qui permet de constater d'un coup d'œil la portée déductive de chaque postulat.

c'est-à-dire, en vertu de la définition de θ :

$$x, y \varepsilon G . \supset : x < y . = . y = x + (G-0) . \cup . (G-0) + x$$

« Dire que x est plus petit que y, c'est dire que y est la somme de x et d'une grandeur non nulle. » On pose naturellement :

$$x, y \varepsilon G . \supset : x > y . = . y < x \qquad \text{Df}$$

« Dire que x est plus grand que y, c'est dire que y est plus petit que x. »

On démontre alors que la relation $<$ est transitive, c'est-à-dire :

$$x, y, z \varepsilon G . \supset : x < y . y < z . \supset . x < z$$

et qu'il y a disjonction complète entre les 3 alternatives [1] :

$$x = y, \qquad x < y, \qquad x > y.$$

Enfin on définit la *différence* de deux grandeurs comme suit :

$$a \geqslant b . \supset . a - b = G \frown x \ni (b + x = a) \qquad \text{Df}$$

« Si a est égale ou supérieure à b, la différence $(a - b)$ est une grandeur x telle que $b + x = a$ » ; et l'on démontre que la grandeur ainsi définie existe et qu'elle est unique.

Dans cette théorie des grandeurs on n'a pas jusqu'ici fait appel à la notion de nombre. Cette notion s'introduit nécessairement dès que l'on conçoit les grandeurs *multiples* d'une même grandeur. M. Burali-Forti emploie même la considération des grandeurs multiples pour obtenir une définition *nominale* des nombres entiers. Il définit les multiples d'une même grandeur comme les sommes obtenues en ajoutant successivement cette grandeur à elle-même : cette définition nominale n'implique pas l'idée de nombre, mais bien la loi d'induction complète. Puis il définit les nombres entiers comme les *opérations* par lesquelles on obtient les multiples d'une grandeur donnée en partant de cette grandeur [2]. Nous n'adop-

1. Le postulat VI énonce ces trois alternatives, mais n'affirme pas qu'elles sont disjointes, c'est-à-dire exclusives les unes des autres.

2. Voir son mémoire sur *Les propriétés formelles des opérations algé-*

tons pas cette définition, bien qu'elle soit logiquement correcte, parce qu'elle nous paraît détournée et inutilement compliquée. En effet, elle fait dériver l'idée de nombre de l'idée de grandeur, alors qu'on peut obtenir, on l'a vu, une définition *nominale* du nombre indépendamment de la notion de grandeur. En outre, elle exige qu'on démontre que l'ensemble d'opérations ainsi défini est *le même* pour toutes les suites de grandeurs multiples (de même espèce ou d'espèce différente), sans quoi l'on aurait autant de systèmes de nombres qu'il y a de grandeurs différentes, et non l'ensemble *unique* des nombres entiers. Enfin cette définition ne permet pas d'établir l'*existence* des nombres ainsi définis, attendu que, comme nous le disons plus loin, l'*existence* des grandeurs elles-mêmes n'est pas logiquement établie, ou ne peut l'être qu'au moyen de l'existence des nombres mêmes; tandis que la définition nominale des nombres entiers que nous avons donnée (d'après M. Russell) permet d'établir leur existence. Pour toutes ces raisons, nous pouvons admettre la notion de nombre comme indépendante de celle de grandeur, et introduire sans scrupule les nombres dans la théorie des grandeurs [1].

Nous définirons donc directement les grandeurs multiples d'une même grandeur a en disant que ce sont les sommes de 1, 2, 3,... n... quantités égales à a (2). Plus rigoureusement, nous

briques (déjà cité) et son mémoire *Sur les diverses définitions du nombre entier*, ap. *Bibl. du Congrès de Philosophie*, t. III. Une théorie analogue des nombres, fondée sur la considération des grandeurs, se trouvait déjà dans Bettazzi, *Teoria delle Grandezze*, ouvrage couronné par l'Académie des Lincei (Pisa, 1890). Cet ouvrage contient d'ailleurs, en *Appendice*, une théorie analytique du nombre, indépendante de l'idée de grandeur.

1. D'ailleurs, M. Burali-Forti lui-même, dans son mémoire *Le classi finite* (*Atti dell' Accademia delle Scienze di Torino*, 1896) a montré qu'on peut définir le nombre entier (cardinal) sans faire appel aux notions de grandeur ni d'ordre, au moyen des seules notions de classe et de correspondance (comme dans la théorie que nous avons exposée précédemment). Il est vrai qu'il n'obtenait ainsi qu'une définition par abstraction, et non une définition nominale.

2. Nous disons « quantités égales », car il n'y a pas, dans notre théorie, de « grandeurs égales », chaque grandeur étant unique. Plus exactement, une grandeur double d'une autre est la grandeur de la quantité obtenue en additionnant deux quantités égales à cette autre. De même que l'addi-

définirons le n^e multiple (le n-uple) de a par induction complète, en posant :

$$1a = a, \qquad (n+1)\,a = na + a.$$

Ces deux formules suffisent à définir l'expression na pour toutes les valeurs entières de n, c'est-à-dire pour l'infinité des nombres entiers[1]. Cette expression n'est pas à proprement parler un produit, car elle est hétérogène : a est une grandeur, tandis que n est un nombre, un « coefficient », qui indique combien de quantités égales à a on doit additionner. En un mot, c'est une somme abrégée.

Nous pouvons supposer définies les opérations sur les nombres entiers, et démontrées leurs propriétés essentielles, notamment les lois associatives et commutatives de l'addition et de la multiplication arithmétiques. Il convient de rappeler que pour l'addition des grandeurs on a postulé la loi associative, mais que la loi commutative n'est pas encore établie.

On démontre alors les théorèmes suivants (où a désigne toujours une grandeur, et m, n des nombres entiers)[2] :

$$ma + na = (m+n)\,a \;(^3)$$
$$ma + na = na + ma$$
$$m\,(na) = (mn)\,a$$
$$m\,(na) = n\,(ma)$$
$$ma = na \,.=.\, m = n$$
$$ma < na \,.=.\, m < n$$

Ces deux derniers théorèmes signifient que deux quantités

tion des nombres se définit par l'addition des classes correspondantes, l'addition des grandeurs (et par suite leur multiplication par des nombres) se définit au moyen de l'addition des quantités correspondantes. Cela explique comment une grandeur peut être multiple d'une autre, et néanmoins indivisible, comme nous le soutenons avec M. RUSSELL (v. RUSSELL, *op. cit.*, § 166, p. 178).

1. Cf. HUNTINGTON, *op. cit.*

2. Cf. HÖLDER, *loc. cit.*, § 3.

3. Il importe de remarquer que les deux signes + n'ont pas le même sens : celui du 1er membre indique une somme de grandeurs, celui du 2e membre une somme de nombres. Ce théorème signifie que l'addition des grandeurs multiples d'une même grandeur correspond à l'addition de leurs coefficients.

multiples d'une même grandeur sont égales quand leurs coefficients sont égaux, et alors seulement; et que leur inégalité est de même sens que l'inégalité de leurs coefficients. La seconde des formules ci-dessus exprime la loi commutative de l'addition *pour les multiples d'une même grandeur*. De là on peut déduire, en vertu des postulats de la grandeur, la loi commutative pour l'addition de deux grandeurs quelconques [1].

Les huit postulats permettent de démontrer deux propositions qui ont été souvent prises pour axiomes. L'une d'elles est ce qu'on appelle l'*axiome d'Archimède*; elle se formule comme suit :

$$a, b \varepsilon G - 0 \,.\, \supset \,.\, \exists\, N \frown n \ni (na > b)$$

« a et b étant des grandeurs non nulles, il y a un nombre entier n tel que na est plus grande que b. »

L'autre proposition est ce qu'on appelle l'*axiome de la divisibilité*; elle se formule comme suit :

$$a \varepsilon G \,.\, n \varepsilon N_1 \,.\, \supset \,.\, \exists\, G \frown x \ni (nx = a)$$

« Étant donnée une grandeur a et un nombre entier non nul n, il existe une grandeur x telle que nx égale a. » Cette grandeur x (dont on démontre l'unicité) s'appelle le n^e sous-multiple (ou simplement le n^e) de a. La proposition précédente affirme donc l'existence des sous-multiples de tout ordre pour chaque grandeur de l'espèce de G. C'est ce qu'on appelle vulgairement la *divisibilité indéfinie* de la grandeur. Il est d'ailleurs inutile de discuter si cette divisibilité doit être dite *indéfinie* ou *infinie* : ce qui est sûr, c'est que l'axiome de la divisibilité implique l'existence d'un *nombre infini* de sous-multiples pour chaque grandeur, puisque ces sous-multiples correspondent à *tous* les nombres entiers [2].

1. Huntington, *op. cit.*

2. Ce théorème de la divisibilité ne contredit nullement la thèse philosophique selon laquelle chaque grandeur est indivisible, c'est-à-dire une et simple. Dire qu'une grandeur est divisible, c'est affirmer qu'il existe des grandeurs de même espèce qui en sont des sous-multiples, mais non qu'elle les contienne réellement ou en soit réellement composée; c'est affirmer une relation entre des grandeurs dont chacune peut être une et simple.

On peut maintenant se demander quelle est la portée exacte de cette théorie de la grandeur. On a là une définition par postulats, qui a été transformée en une définition nominale. Au lieu de dire : « Une classe G est une classe de grandeurs homogènes par rapport à l'opération +, quand cette opération effectuée sur deux de ses éléments produit un de ses éléments », et d'ajouter que cette classe vérifie les postulats I-VIII, on dit à présent : « Une classe de grandeurs homogènes est une classe G dans laquelle on peut effectuer l'opération +, et qui *en outre* vérifie les postulats I-VIII ». Il semble qu'il n'y ait guère là qu'un changement de forme, qui sans doute constitue un notable progrès logique, mais qui ne change rien à la nature de l'idée définie. Dans tous les cas, la définition nominale, pas plus que la définition par postulats, ne permet d'affirmer l'existence (et encore moins l'unicité) de l'objet défini. On peut bien dire : « J'appelle espèce de grandeurs une classe qui possède telles ou telles propriétés », mais rien ne nous assure qu'il existe une espèce de grandeurs, c'est-à-dire une classe possédant ces propriétés. Ou du moins on n'en connaît qu'une : et c'est précisément la classe des nombres réels. Ainsi la seule espèce de grandeurs que l'on connaisse, en Mathématique pure, n'est pas autre que l'ensemble des nombres réels. Et ce qui confirme cette assertion, c'est que, pour démontrer l'indépendance mutuelle des huit postulats, on ne peut recourir qu'à des exemples empruntés à l'ensemble des nombres réels. L'existence des grandeurs n'est donc garantie que par l'existence des nombres réels; et c'est, on le sait, la principale raison pour laquelle nous n'avons pas voulu faire reposer la notion de nombre sur celle de grandeur, bien qu'elle y rentre comme cas particulier, et que les nombres puissent et doivent être considérés comme une espèce de grandeurs.

D'autre part, rien ne dit que l'objet défini soit unique, c'est-à-dire qu'il n'y ait qu'une espèce de grandeurs; et le contraire est même avéré : il y a diverses espèces de grandeurs qui correspondent exactement à la même définition et qui

concordent par toutes leurs propriétés. Est-ce à dire que la définition de la grandeur soit équivoque? Nullement, cela signifie qu'elle ne définit pas les espèces concrètes de grandeurs, mais l'idée abstraite et générale de *grandeur*. Or, si l'on applique le principe d'abstraction à ce cas, et si l'on cherche ce qu'il y a de commun à toutes les espèces de grandeurs qui vérifient cette définition, on ne trouve que ceci : qu'elles correspondent toutes à l'ensemble des nombres réels. C'est cet ensemble qui représente leurs propriétés formelles et qui est en quelque sorte leur portrait commun, leur schème générique. Dès lors, on comprend que le nombre réel soit le type de la grandeur, et que toutes les autres espèces de grandeurs puissent se ramener à celle-là, dès qu'on les réduit à leurs propriétés abstraites et formelles.

Tout cela explique comment on a pu, dans le *Formulaire de Mathématiques*, supprimer la théorie des grandeurs : c'est la théorie des nombres réels qui la représente et la remplace. Plus généralement, cela explique que la plupart des mathématiciens identifient les deux concepts « grandeur » et « nombre réel », et réduisent la Mathématique à la science du nombre (du nombre *généralisé*, il est vrai). En tout cas, cela semble prouver que (comme le soutient M. RUSSELL) l'idée de grandeur est étrangère à la Mathématique pure, non pas qu'on ne puisse en donner une définition nominale et purement logique (M. BURALI-FORTI a prouvé le contraire), mais parce qu'on ne peut connaître que par l'expérience (ou l'intuition) l'existence de telle ou telle espèce de grandeurs. On peut bien dire, *in abstracto* : « J'appelle *espèce de grandeurs* toute classe d'objets qui vérifiera tels et tels postulats », mais, pour avoir des grandeurs concrètes, il faut qu'une telle classe d'objets soit *donnée* dans l'expérience, comme par exemple des longueurs ou des poids. On conçoit nettement la différence qu'il y a entre l'idée de nombre, construite entièrement par l'esprit, et l'idée de grandeur, qui implique un élément empirique, une donnée concrète. C'est pour cela, du reste, qu'il n'y a qu'un ensemble de nombres (réels), tandis qu'il y a plusieurs espèces de grandeurs.

Il n'en est pas moins vrai que l'on peut *logiquement* définir les nombres entiers, puis les nombres rationnels, et enfin les nombres réels, par l'intermédiaire des grandeurs. Et alors se pose une question qui dépasse le ressort de la Logique, et qui est proprement épistémologique : Laquelle de ces deux notions, nombre et grandeur, est le fondement de l'autre? Il ne s'agit pas ici d'une question psychologique d'origine ou d'antériorité chronologique : l'ordre *logique* des notions peut être différent ou même inverse de leur ordre historique ; à plus forte raison leur ordre *rationnel.* La question est exactement celle-ci : on peut, logiquement, définir le nombre par la grandeur ou la grandeur par le nombre; laquelle de ces deux méthodes est la plus rationnelle, c'est-à-dire laquelle de ces deux idées est la raison d'être de l'autre?

La réponse à cette question est moins simple et moins tranchée qu'on ne pourrait le croire d'après son énoncé. Pour le dire tout de suite, elle nous paraît être la suivante : L'idée de nombre entier (cardinal) est indépendante de l'idée de grandeur; mais les autres espèces de nombres (les nombres généralisés) procèdent de l'idée de grandeur.

Le premier point nous semble établi par tout ce qui précède. Nous avons pu définir le nombre entier, comme nombre cardinal, au moyen de la seule notion de classe ou de collection, sans avoir à faire appel aux propriétés de ces classes spéciales qu'on nomme des espèces de grandeurs. C'est comme nombre cardinal que nous avons introduit l'idée de nombre dans la théorie des grandeurs (par la définition des *multiples*). Au contraire, la définition des nombres entiers au moyen des grandeurs, comme coefficients, ou plutôt comme numéros d'ordre des multiples d'une même grandeur, nous a paru détournée et compliquée. Ajoutons qu'elle est beaucoup trop particulière et spéciale; car le nombre cardinal s'applique à bien d'autres objets qu'aux grandeurs. Une fois défini le nombre cardinal pour une classe quelconque, il est aisé de l'appliquer à une classe de grandeurs; mais il est beaucoup

plus difficile, quand on l'a défini dans une classe de grandeurs, de l'étendre à toute espèce de classes; en tout cas, cela n'est pas naturel ou plutôt rationnel. Enfin, quand on définit les nombres entiers au moyen des grandeurs, l'*unicité* de leur ensemble n'apparaît pas d'abord et demande une démonstration assez pénible, fondée sur la correspondance biunivoque de toutes les suites de grandeurs multiples; c'est en somme une application du principe d'abstraction : la suite des nombres entiers est ce qu'il y a de commun à toutes les suites de grandeurs multiples. Au contraire, la définition logique du nombre entier (comme nombre cardinal) en établit immédiatement l'unicité.

Mais la thèse que nous venons de soutenir pour les nombres entiers, à savoir qu'ils sont indépendants de la notion de grandeur, ne nous paraît plus soutenable pour les autres espèces de nombres. Encore une fois, il ne s'agit plus ici de Logique, et les arguments logiques pour et contre cette thèse se neutralisent, ou plutôt ne portent pas. Il est bien vrai que l'on peut définir formellement les nombres rationnels comme relations (*rapports*) entre les nombres entiers : mais c'est qu'alors on considère les nombres entiers comme une espèce de grandeurs; et ce qui le prouve, c'est que ces mêmes rapports se retrouvent dans toutes les autres espèces de grandeurs. La fraction m/n n'est pas seulement le rapport du nombre m au nombre n, mais encore le rapport de deux grandeurs x et y d'une espèce quelconque, dès qu'il existe une grandeur z de même espèce telle qu'on ait : $x = mz$, $y = nz$, ou, plus simplement, dès qu'on a entre ces deux grandeurs la relation : $nx = my$. C'est bien là ce qu'on entend lorsqu'on dit que x est les m/n^{es} de y; et c'est en ce sens que le nombre m lui-même est les m/n^{es} du nombre n. Le symbole m/n est donc en réalité le symbole d'une *opération* à effectuer sur la grandeur y pour obtenir la grandeur x. Ainsi se justifie la conception (de MM. Méray et Burali-Forti) des nombres rationnels comme *opérations*, c'est-à-dire en définitive (suivant M. Russell) comme *relations*, non seulement entre les nombres

entiers, mais entre les grandeurs d'une espèce quelconque[1].

Les mêmes considérations s'appliquent aux nombres réels, quand ce ne serait que pour cette raison bien simple, que, de quelque façon qu'on les définisse, on ne peut les définir qu'au moyen des nombres rationnels. Si donc on croit devoir regarder ceux-ci comme des opérations sur les grandeurs ou comme des relations entre grandeurs, on devra nécessairement attribuer la même nature aux nombres réels. Cela sera évidemment vrai si l'on conçoit, avec M. Russell, les nombres réels comme de simples ensembles de nombres rationnels. Mais cela sera encore plus vrai si on les conçoit, avec MM. Peano et Burali-Forti, comme des *limites supérieures* de ces mêmes ensembles. En effet, l'existence de ces limites supérieures résulte uniquement du postulat de la continuité. Or c'est là un postulat de la définition de la grandeur, et non pas un postulat du nombre. Il n'y a donc aucune raison, dans le domaine du nombre, pour y introduire des nombres irrationnels, tandis qu'il y a une raison, dans la théorie des grandeurs, pour admettre ces mêmes nombres comme représentant les rapports des grandeurs incommensurables, dont le postulat de la continuité affirme ou implique l'existence. Il convient donc de concevoir les nombres irrationnels, eux aussi, et en général les nombres réels, comme des opérations sur les grandeurs, ou comme des relations ou *rapports* entre des grandeurs de même espèce[2].

1. C'est la thèse soutenue par M. Frege dans ses *Grundgesetze der Arithmetik*, t. II (1903), à savoir que les nombres réels sont des rapports de grandeur. C'était déjà, nous l'avons dit, la conception de Newton.

2. Une remarque intéressante a été faite par M. Burali-Forti (*Sulla teoria generale delle grandezze*, p. 15, note) : les nombres entiers vérifient les 4 premiers postulats de la définition des grandeurs; les nombres rationnels vérifient *en outre* les postulats V et VI et l'axiome de divisibilité; enfin les nombres réels vérifient *en outre* l'axiome de continuité. Ainsi la généralisation du nombre s'effectue par des étapes successives qui consistent à attribuer progressivement au nombre les propriétés de la grandeur.

§ C. — La mesure des grandeurs.

Les considérations précédentes nous amènent à étudier ce qu'on appelle la mesure des grandeurs, et à en préciser les conditions. En effet, la mesure des grandeurs consiste à établir entre les grandeurs d'une même espèce et les nombres une relation telle que l'on puisse substituer ceux-ci à celles-là. Plus exactement, *mesurer* une espèce de grandeurs [1], c'est établir entre cette espèce de grandeurs et l'ensemble des nombres *réels* une correspondance biunivoque telle, qu'à la somme de deux grandeurs quelconques corresponde la somme des deux nombres correspondants. Bien entendu, le mot *somme* est pris ici dans deux sens différents : la première fois il désigne l'addition spéciale aux grandeurs considérées, la seconde fois il désigne l'addition arithmétique. Il n'y a donc aucune nécessité à ce qu'à la somme des grandeurs corresponde la somme des nombres: il n'y a là qu'une raison de commodité et de convenance.

Pour mieux comprendre cette raison, il convient de faire appel à une idée plus générale que celle de mesure, à la notion de *proportionnalité*. Étant donnés deux ensembles de grandeurs (de même espèce dans chaque ensemble, mais non pas nécessairement de l'un à l'autre ensemble), on dit que ces ensembles sont proportionnels [2], s'il y a entre eux une correspondance biunivoque telle, que le rapport de deux grandeurs quelconques de l'un soit égal au rapport des deux grandeurs correspondantes de l'autre. On sait, d'après ce qui précède, ce qu'il faut entendre par *rapport* de deux grandeurs A et B (prises dans cet ordre) ou rapport de A à B : c'est le nombre (rationnel ou irrationnel) par lequel on doit « multiplier » B pour obtenir A [3]; autrement dit, l'opération par laquelle on

1. On remarquera que l'expression *mesurer* est appliquée, non à une grandeur en particulier, mais à toutes les grandeurs d'une même espèce.

2. On remarquera que l'épithète *proportionnel* est appliquée, non aux grandeurs particulières, mais aux deux ensembles.

3. Nous mettons *multiplier* entre guillemets, pour rappeler que c'est là un sens spécial et symbolique du mot *multiplier*.

peut construire A en partant de B. En un mot, la proportionnalité consiste dans l'égalité des rapports entre grandeurs correspondantes des deux ensembles (lesquelles peuvent être respectivement d'espèces différentes). Or, pour que deux ensembles de grandeurs soient proportionnels, il faut et il suffit qu'à la somme de deux grandeurs quelconques de l'un corresponde la somme des grandeurs correspondantes de l'autre. C'est là un théorème assez important pour que nous en rappelions ici la démonstration [1].

1° La condition est nécessaire. Supposons que les deux ensembles soient proportionnels; soient A, B deux grandeurs du premier ensemble, C leur somme, et A′, B′, C′ les grandeurs correspondantes du second ensemble. On a par hypothèse : $A + B = C$; donc :

$$\frac{A}{C} + \frac{B}{C} = \frac{A + B}{C} = 1$$

en vertu des lois du calcul des rapports. Mais on a, par hypothèse :

$$\frac{A'}{C'} = \frac{A}{C}, \qquad \frac{B'}{C'} = \frac{B}{C}.$$

Donc on a aussi :

$$\frac{A'}{C'} + \frac{B'}{C'} = \frac{A' + B'}{C'} = 1,$$

c'est-à-dire :

$$A' + B' = C',$$

ce qui prouve que la somme de A′ et de B′ correspond à la somme de A et de B.

2° La condition est suffisante. Supposons en effet qu'elle soit

1. V. Niewenglowski et Gérard, *Cours de Géométrie élémentaire*, t. I, Note I : Sur la mesure des grandeurs, § 360 (C. Naud, 1898). Les énoncés classiques ajoutent cette condition, qu'à des grandeurs égales correspondent des grandeurs égales. Mais cette condition est inutile, du moment que l'on n'admet pas de *grandeurs* égales, mais des *quantités* égales correspondant à une grandeur identique. De même, on ajoute parfois cette condition, qu'à des grandeurs inégales doivent correspondre des grandeurs dont l'inégalité ait le même sens. Mais cette condition est superflue, car elle est impliquée dans la condition relative à la somme, du moment que l'inégalité (avec son sens) est définie au moyen de l'addition.

vérifiée par les deux ensembles. Puisque à la somme de deux (ou plusieurs) grandeurs de l'un correspond la somme des grandeurs correspondantes de l'autre, à la grandeur mA (somme de m quantités égales à A) correspondra la grandeur mA′ (A′ étant la correspondante de A). A la grandeur $\frac{1}{n}$ A correspondra la grandeur $\frac{1}{n}$ A′, car si :

$$B = \frac{1}{n} A \qquad B' = \frac{1}{n} A'$$

on a aussi :

$$nB = A \qquad nB' = A'$$

et si B et B′ ne se correspondaient pas, A et A′ ne pourraient pas se correspondre. Par suite, à la grandeur $\frac{m}{n}$ A correspond la grandeur $\frac{m}{n}$ A′; c'est-à-dire que le théorème est établi pour le cas de deux grandeurs commensurables. On sait que, par un procédé de raisonnement général, il peut alors s'étendre au cas de deux grandeurs incommensurables. En effet, tout nombre rationnel $\frac{m}{n}$ inférieur (ou supérieur) au rapport $\frac{A}{B}$ sera aussi inférieur (ou supérieur) au rapport $\frac{A'}{B'}$; par conséquent les deux rapports donneront lieu à la même répartition des nombres rationnels en deux classes, c'est-à-dire correspondront au même nombre irrationnel. Le théorème est donc démontré. Il importe de remarquer que ce théorème suppose que les deux ensembles de grandeurs vérifient les huit postulats énoncés précédemment, ainsi que l'axiome de divisibilité et l'axiome d'Archimède, qui en sont des conséquences.

Cela posé, qu'est-ce que mesurer l'ensemble des grandeurs d'une même espèce? C'est simplement établir une proportionnalité entre cet ensemble et l'ensemble des nombres réels (lequel est une espèce de grandeurs). Or cela est possible, à la condition que l'ensemble de grandeurs considéré vérifie les huit postulats (puisque nous savons que l'ensemble des nombres

réels les vérifie). Ainsi les huit postulats ne sont pas autre chose que les conditions auxquelles un ensemble de grandeurs est mesurable; et l'on peut dire qu'ils définissent le concept de *grandeur mesurable*.

Une fois ces conditions remplies, on peut appliquer à la mesure des grandeurs le théorème relatif à la proportionnalité en général, et dire que : pour qu'un ensemble de grandeurs soit mesurable, il faut et il suffit qu'à la somme de deux grandeurs quelconques on puisse faire correspondre la somme des nombres réels correspondants. On peut prendre pour cas particulier la somme de 2 ou de n quantités égales; la condition se réduit alors à cet énoncé courant : Il faut et il suffit qu'on puisse définir la grandeur double ou n-uple d'une autre. Mais on ne doit jamais oublier que cette condition présuppose que les huit postulats sont vérifiés par l'espèce de grandeurs considérée.

En vertu de la définition de la proportionnalité, lorsqu'un ensemble de grandeurs est mesurable (ou plutôt *mesuré*), le rapport de deux grandeurs quelconques est égal au rapport des nombres réels correspondants. On voit quel intérêt il y avait à concevoir que les rapports entre nombres ne sont pas des nombres (de la même espèce), puisque *les mêmes* rapports qui existent dans l'ensemble des nombres réels existent dans chaque ensemble de grandeurs mesurable. Le rapport de 2 mètres à 3 mètres est *identique* au rapport de 2 grammes à 3 grammes, ou à celui du nombre entier 2 au nombre entier 3; et c'est pourquoi tous ces rapports peuvent se représenter par la fraction 2/3 [1].

Nous pouvons enfin (et seulement à présent) définir la *mesure* d'une grandeur particulière. On appelle *mesure* d'une gran-

1. Il en résulte que les nombres rationnels sont essentiellement abstraits. On ne devrait pas dire : 2/3 de mètre, mais : une longueur qui est au mètre dans le rapport 2/3. On ne devrait pas dire non plus : 3 mètres, mais : une longueur qui est au mètre dans le rapport de 3 à 1. On voit bien que le nombre 3 n'est plus ici un nombre cardinal, ni même un nombre entier (désignant une collection), mais une mesure, c'est-à-dire un rapport.

deur (par rapport à une grandeur de même espèce) le rapport de la première à la seconde, ou, comme on dit vulgairement, le nombre par lequel il faut multiplier la seconde pour obtenir la première. Dans le cas où les deux grandeurs en question sont identiques, la mesure de cette grandeur est le nombre 1 (plus exactement, le nombre rationnel $\frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \ldots = \frac{n}{n}$). C'est pourquoi la seconde grandeur, par rapport à laquelle est définie la mesure, s'appelle *grandeur-unité* ou *unité de mesure*. Le choix de cette grandeur-unité est nécessaire et suffisant pour déterminer la mesure de toutes les autres grandeurs de la même espèce [1]. Cette définition appelle deux observations importantes. La première, c'est que la mesure est toujours un rapport, donc un nombre rationnel ou réel. La seconde, c'est que la mesure est essentiellement relative au choix de la grandeur-unité; or ce choix est absolument arbitraire, étant donné que l'ensemble de grandeurs considéré est continu (par hypothèse); rien ne distingue la grandeur-unité de toutes les autres, rien ne la désigne à notre choix, et la correspondance entre les grandeurs et les nombres serait toute semblable et tout aussi parfaite si l'on choisissait pour unité n'importe quelle autre grandeur. Par conséquent, la correspondance de tel nombre à telle grandeur est toute fortuite et conventionnelle, et en ce sens on peut dire que la mesure des grandeurs comporte un élément d'arbitraire. Mais il n'en faut pas conclure (comme les nominalistes semblent le faire) que la *mesurabilité* des grandeurs soit arbitraire, et dépende d'un « libre décret ». Cette mesurabilité repose sur les propriétés que nous avons énumérées, et ces propriétés sont objectives et indépendantes de nous. Le fait même de la proportionnalité des grandeurs aux nombres n'est pas une convention : les rapports qui existent entre les grandeurs sont aussi réels et objectifs que les grandeurs elles-mêmes, et ne dépendent nullement du choix de l'unité. L'élément arbitraire et subjectif réside uni-

1. De même, et plus généralement, il suffit d'un couple de grandeurs correspondantes pour déterminer une proportionnalité.

quement dans le passage du rapport à la mesure, c'est-à-dire dans l'adoption d'une seule et unique grandeur comme second terme de tous les rapports. (C'est pourquoi il importe de définir la mesure par le rapport, et non pas, comme on le fait quelquefois, le rapport par la mesure.) Ainsi, dans cette théorie de la mesure des grandeurs, que les irrationalistes exploitent si complaisamment en faveur d'on ne sait quelle « liberté » chimérique et absurde, il n'y a rien qui autorise à considérer la mesurabilité des grandeurs comme dépendant à un degré quelconque de nos « conventions » et de nos « décrets ».

Au surplus, il faut se garder d'exagérer la portée de la théorie de la mesure des grandeurs, et de croire que les grandeurs n'aient droit de cité en Mathématique qu'à la condition de passer sous les Fourches Caudines du nombre. La mesure des grandeurs a une valeur pratique bien plutôt que théorique, comme l'a bien montré M. Russell[1]; elle a en somme pour but de rendre les grandeurs plus maniables, en permettant de les représenter par des nombres et de les soumettre au calcul algébrique (c'est-à-dire arithmétique). Mais si une telle représentation est commode, économique en quelque sorte, elle n'a rien de nécessaire; et la Mathématique moderne traite bien des espèces de grandeurs qui ne sont pas proportionnelles à des nombres (par exemple les vecteurs et autres grandeurs géométriques). Elle en est quitte pour inventer des calculs nouveaux, différents du calcul algébrique, qui s'appliquent *directement* à ces espèces de grandeurs : calcul de Grassmann, calcul des quaternions, etc. Bien mieux, elle invente, pour représenter certaines espèces de grandeurs non mesurables (à plusieurs dimensions) des symboles qu'on appelle encore des nombres, par analogie, à savoir les nombres complexes. Ce dernier fait confirme notre thèse, à savoir que, dans la généralisation du nombre, c'est le nombre qui se modèle sur la grandeur, et non la grandeur sur le nombre. Mais c'est là un sujet réservé au chapitre suivant.

1. *Op. cit.*, § 171.

Pour conclure celui-ci, nous avons distingué deux sortes de grandeurs : les grandeurs intensives, pour lesquelles il n'y a pas d'addition, de sorte que leur relation d'inégalité est primitive et indéfinissable; et les grandeurs extensives, pour lesquelles il y a une addition, notion primitive et indéfinissable, au moyen de laquelle on peut définir leur inégalité. Mais il ne faut pas croire que toutes les espèces de grandeurs extensives vérifient nécessairement les *huit* postulats de M. Burali-Forti : ceux-ci ne sont vérifiés que par les *grandeurs continues mesurables*, qui constituent le type le plus complet et le plus parfait de la grandeur, et qui sont notamment la plupart des grandeurs géométriques et physiques. Il peut y avoir des ensembles de grandeurs extensives qui ne vérifient que les quatre premiers postulats : ils seront alors semblables à l'ensemble des nombres entiers, c'est-à-dire que toutes les grandeurs non nulles seront les multiples d'une d'entre elles, qui sera la plus petite [1]. Il peut y en avoir d'autres qui vérifient les six premiers postulats et l'axiome de divisibilité : ils seront semblables à l'ensemble des nombres rationnels, et par suite *compacts*, c'est-à-dire qu'entre deux grandeurs quelconques il y en aura toujours une autre (d'où résulte le postulat VII : qu'aucune grandeur non nulle n'est la plus petite des grandeurs non nulles). En somme, les huit postulats réunis constituent le maximum des conditions que peut vérifier un ensemble de grandeurs, mais ils peuvent ne pas l'être tous par tel ou tel ensemble [2]. C'est à l'expérience ou à l'intuition de constater, pour chaque espèce de grandeurs donnée, quels postulats elle vérifie.

Cette observation nous permet de répondre à la question suivante : La théorie des grandeurs fait-elle partie des Mathématiques pures, autrement dit, est-elle entièrement *a priori*? La réponse est double. Oui, si l'on considère des ensembles de

1. Grandeurs « limitées » de M. Bettazzi (*op. cit.*, p. 24).
2. On pourrait dire, inversement, que les postulats de M. Russell sont le minimum des conditions que doit vérifier une classe pour mériter le nom de classe de grandeurs.

grandeurs hypothétiques que l'on dote de telles et telles propriétés; non, si l'on étudie des ensembles de grandeurs réelles et données, qui possèdent objectivement ces propriétés. Car, dans le premier cas, les postulats ne sont que des hypothèses problématiques dont on déduit les conséquences logiques sans affirmer ni les unes ni les autres; mais, dans le second cas, les postulats deviennent des propositions assertoriques, des vérités de fait (d'expérience ou d'intuition), et toutes leurs conséquences revêtent le même caractère. De toute manière, on ne peut pas, sans quelque donnée empirique ou intuitive, affirmer l'existence d'aucune espèce de grandeurs (autre que les nombres); c'est en ce sens qu'il est vrai de dire que la Mathématique pure ne connaît pas la grandeur, et repose uniquement sur la notion de nombre *généralisée*. Mais il ne faut pas oublier que la généralisation du nombre, tout en se présentant aujourd'hui sous une forme purement logique, a son origine et sa raison d'être dans la considération des grandeurs.

CHAPITRE VI

LA GÉOMÉTRIE

La Géométrie passe généralement encore pour être la science de l'espace. Il semblerait donc qu'elle dût commencer, en bonne méthode, par une définition de l'espace. Or une telle définition est, d'abord, très difficile et très compliquée; ensuite, elle est parfaitement inutile : l'idée et le mot même d'espace ne se trouvent pas dans EUCLIDE ni dans ARCHIMÈDE [1]. Il en est de même des notions de *ligne* et de *surface*, qu'EUCLIDE lui-même essaie de définir au début de ses *Éléments*. La définition de ces notions générales est extrêmement délicate, et ne peut être faite avec rigueur qu'au moyen du Calcul intégral : c'est dire que sa place n'est pas dans les éléments ni dans les principes de la Géométrie [2]. Il ne faudrait donc pas croire que, si la Géométrie ne peut pas définir dès le début ces trois notions, c'est parce que celles-ci sont des notions premières, fondamentales

1. PEANO, *Sui fondamenti della Geometria*, ap. *Revue de Mathématiques*, t. IV, p. 52 (1894).

2. Par exemple, certains auteurs définissent la surface comme ce qui limite un solide. Or il existe certaines surfaces qui n'ont qu'une face, ou dont les deux faces se relient d'une manière continue, de sorte qu'elles ne partagent pas l'espace en deux régions séparées, et ne peuvent par suite servir à délimiter un solide. (PEANO, *ibid.*) Voici l'exemple simple et concret qu'on en cite habituellement : Qu'on prenne une bande rectangulaire ABA′B′ beaucoup plus longue que large, et qu'on en colle les extrémités de telle sorte que A′ coïncide avec A et B′ avec B, le ruban fermé ainsi constitué n'a qu'une face, en ce sens qu'on peut passer d'une face sur l'autre sans le percer. C'est ce qu'on appelle un *ruban paradromique*. V. ROUSE BALL, *Problèmes et récréations mathématiques*, trad. Fritz-Patrick (Paris, Hermann, 1898).

et simples; tout au contraire, c'est parce qu'elles sont très complexes; et la Géométrie peut parfaitement se constituer sans elles, comme on le verra plus loin. Ce n'est pas sur les idées générales et vagues d'espace, de surface et de ligne que la Géométrie est fondée, mais sur les idées particulières et précises de *droite*, de *plan* et surtout de *point*; et c'est parmi celles-ci que se trouvent les notions premières et indéfinissables de cette science [1]. En particulier, le *point* est l'élément indéfinissable de tous les systèmes de Géométrie. Les points sont les termes individuels de toutes les relations dont l'étude constitue les diverses Géométries; et si l'espace peut être défini au début de la Géométrie, ce ne peut être que comme l'ensemble des points.

§ A. — Les Dimensions. Topologie.

Mais ici intervient nécessairement la considération des dimensions. On peut essayer de définir la ligne, la surface et l'espace en disant que ce sont respectivement des ensembles continus de points à un, à deux et à trois dimensions. C'est en généralisant cette conception que Riemann [2] définissait l'espace comme un ensemble (multiplicité) à plusieurs dimensions; et il l'imaginait engendré progressivement par le mouvement d'un ensemble antérieurement formé « à travers » une nouvelle dimension. Un point, en parcourant un ensemble continu de positions (numérotées par les nombres réels), engendre une ligne; si cette ligne à son tour parcourt un ensemble continu de positions (numérotées par les nombres réels), elle engendre une surface; cette surface, en parcourant un ensemble continu de positions, engendre un espace à 3 dimensions; et ainsi de suite, car rien ne limite rationnellement cette suite de générations progressives, et par suite le nombre des dimensions de l'espace. Si un espace est obtenu au moyen de n mouvements

1. Nous recommandons cette considération aux sectateurs de la logique aristotélicienne, qui sont habitués à considérer les idées les plus générales comme étant aussi les plus simples et les premières dans l'ordre logique.
2. *Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen* (1854).

successifs (à partir du point), il a n dimensions : cela veut dire que chacun de ses points est déterminé par n coordonnées numériques, qui fixent respectivement sa place sur une ligne, la place de cette ligne sur une surface, la place de cette surface dans un espace à 3 dimensions, etc.

Cette conception de l'espace est en quelque sorte classique, et a passé dans beaucoup d'ouvrages élémentaires, soit de géométrie, soit de philosophie. Malheureusement, elle est insuffisante, non seulement parce qu'elle fait appel à l'idée peu claire de variation ou de mouvement, mais parce qu'on ne voit pas la possibilité des variations indiquées, ni comment elles « engendrent » de nouveaux ensembles. Par exemple, un plan peut se déplacer d'une manière continue tout en restant identique à lui-même. Dira-t-on encore que sa variation engendre une multiplicité à trois dimensions? D'une manière générale, on ne peut rien définir ni expliquer *par génération*, car toute variation, tout mouvement, présuppose défini et donné l'ensemble des valeurs que la variable doit prendre, l'ensemble des positions que le mobile doit occuper. Pour qu'une ligne puisse engendrer une multiplicité à deux dimensions, il faut qu'elle puisse sortir d'elle-même, c'est-à-dire qu'il y ait déjà une deuxième dimension ; et de même, il faut une troisième dimension pour qu'une surface puisse se déplacer en sortant d'elle-même, au lieu de glisser simplement sur elle-même en se reproduisant indéfiniment.

En outre, cette conception présente des difficultés qu'on ne pouvait soupçonner du temps de RIEMANN. On croyait alors qu'une ligne et une surface, par exemple, ne pouvaient être équivalentes, comme ensembles de points, qu'elles étaient « incommensurables ». Si la ligne était un ensemble infini de points, la surface devait être un ensemble infiniment plus infini, et ainsi de suite. Cela vient de ce qu'on n'avait que des notions vagues de l'infini numérique et du nombre des éléments du continu. M. Georg CANTOR a démontré, au contraire, que tous les continus sont équivalents, quel que soit le nombre de leurs dimensions, c'est-à-dire qu'on peut établir entre eux une cor-

respondance biuniforme, point par point, de sorte que rien ne les distingue au point de vue du *nombre* de leurs éléments. Il y a « autant » de points dans un segment rectiligne (ou curviligne) que dans un carré ou dans un cube, voire dans un espace à n dimensions et même à ω dimensions. Cette vérité paradoxale a été illustrée par M. PEANO, lorsqu'il a inventé une courbe qui remplit un carré, c'est-à-dire qui passe par tous les points de ce carré[1]. Pour définir cette courbe, M. Peano a employé son ingénieuse méthode de transformation arithmétique dont nous avons vu déjà une autre application (p. 96); pour plus de clarté, nous nous bornerons à la décrire géométriquement[2]. Soit un carré de côté 1; on partage d'abord ses côtés en un nombre *impair* de parties (égales ou inégales); supposons, pour simplifier, que ce nombre est 3, et que les parties sont égales. Le carré se trouve par suite partagé en 9 carrés égaux. On mène alors une ligne brisée continue qui les traverse tous diagonalement en allant d'un sommet du carré au sommet opposé (fig. 3). Numérotons de 0 à 9 les sommets par lesquels elle passe successivement. Prenons d'autre part un segment rectiligne quelconque, partageons-le en 9 segments contigus et consécutifs (égaux si l'on veut), et numérotons les points de division de 0 à 9. Ce numérotage établit une correspondance uniforme (mais non biuniforme) entre ces points de division et les sommets successifs de la ligne brisée. Cela posé, on effectue dans chacun des carrés partiels une construction semblable (géométriquement) à celle qu'on a effectuée dans le carré entier, et dans chacun des segments de la ligne droite une subdivision semblable à la première. On établit ainsi une correspondance uniforme entre 82 points de la ligne droite et les 82 sommets successifs d'une ligne brisée qui traverse les 81 nouveaux carrés. Il est à remarquer que, dans cette nouvelle correspondance, les points correspondants suivant l'ancienne

1. G. PEANO, *Sur une courbe qui remplit toute une aire plane*, ap. *Math. Annalen*, t. XXXVI, p. 157-160 (1890).
2. D'après SCHÖNFLIES, *Bericht über die Mengenlehre*, ap. *Jahresbericht der Mathematiker-Vereinigung*, t. VIII, 2, p. 121 (1900).

sont encore correspondants, et que l'ancienne ligne brisée se trouve tout entière contenue dans la nouvelle, mais en tronçons séparés : la diagonale 0-9 se trouve décomposée en 3 segments 0-1, 4-5, 8-9 auxquels correspondent des segments séparés de la ligne droite (et même le segment 4-5 a son sens interverti dans cette transformation). On continue ainsi indéfiniment à subdiviser le carré, d'une part, et le segment recti-

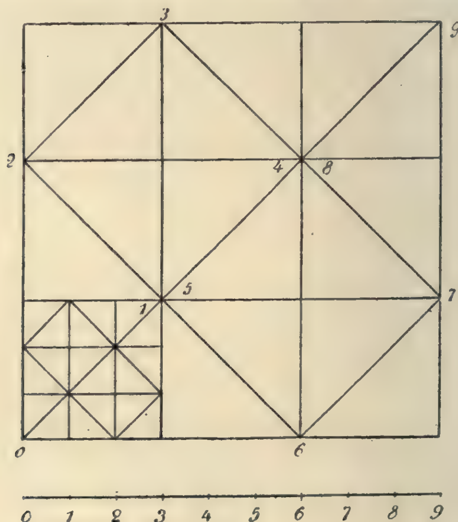


Fig. 3.

ligne, d'autre part, chaque segment partiel correspondant à un carré partiel de la subdivision correspondante. On établit ainsi une correspondance entre tous les points du segment et tous les points du carré dont les coordonnées peuvent s'exprimer en une fraction systématique dans le système de numération ternaire, c'est-à-dire en une série de la forme :

$$\frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{a_3}{3^3} + \dots + \frac{a_n}{3^n}$$

Tous les autres points (rationnels ou irrationnels) du carré peuvent être définis comme limites par rapport à l'ensemble des points précédents. A chacun d'eux on fera correspondre

sur le segment le point-limite de la suite des points correspondants. Autrement dit, si un point x du carré n'est le sommet d'aucun carré partiel, il sera contenu dans une suite infinie de carrés partiels appartenant respectivement à toutes les subdivisions successives. A cette suite de carrés (contenus les uns dans les autres) correspondra, sur la ligne droite, une suite infinie d'intervalles de plus en plus petits (et contenus les uns dans les autres), qui déterminent un point-limite; ce point sera, par définition, le correspondant du point x. En résumé, on a une correspondance *uniforme* entre tous les points du segment et tous les points du carré, et cette correspondance est en outre *continue*, c'est-à-dire qu'à des points voisins sur le segment correspondent des points voisins dans le carré. En définitive, on a établi entre tous les points du carré un ordre linéaire et continu, et c'est ce qu'on exprime en disant qu'on a une ligne continue qui remplit le carré [1]. Mais cette correspondance n'est pas *biuniforme*, et sa converse n'est pas continue : car on voit qu'à chaque sommet des carrés partiels correspondent *deux* points distincts du segment (par exemple, 1 et 3, 4 et 8) et, à plus forte raison, à deux points voisins du carré ne correspondent pas deux points voisins du segment (exemple les points $1-\varepsilon$ et $3+\varepsilon$.) En général, à chaque sommet d'un carré partiel correspondent 2 points; à chaque point d'un côté d'un carré partiel (c'est-à-dire d'une ligne de subdivision) qui n'est pas un sommet correspondent 4 points; et à chacun des autres points correspond un seul point [2].

Nous avons exposé en détail le paradoxe de M. Peano, parce

1. Cette ligne continue n'a d'ailleurs de tangente en aucun point. C'est un exemple simple d'une fonction continue dans un intervalle et qui n'a pas de dérivée dans tout cet intervalle.

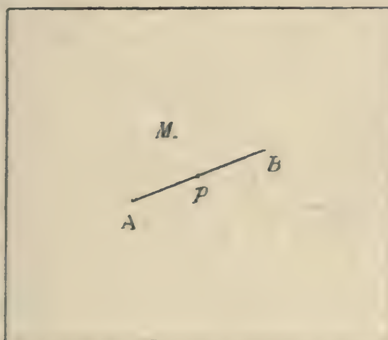
2. M. Hilbert a ensuite imaginé une autre correspondance qui possède les mêmes propriétés (*Ueber die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück*, ap. *Math. Annalen*, t. XXXVIII, p. 459; cf. E. Picard, *Traité d'Analyse*, 2e éd., t. I, p. 22); mais cette correspondance est moins simple et moins intuitive, parce que les points de division du segment correspondent aux carrés partiels, et non à leurs sommets, et que les lignes brisées provisoires ne font pas partie de la courbe définitive. Pour la même raison, la construction des lignes brisées est moins uniforme, et il n'est pas évident qu'elle puisse se prolonger indéfiniment.

qu'il a une grande portée au point de vue philosophique. Il prouve d'une façon saisissante l'insuffisance ou plutôt l'incompétence de l'intuition en matière de Géométrie[1], et particulièrement dans la Topologie, qui paraît cependant relever essentiellement de l'intuition. Toutefois, il ne faut pas exagérer cette portée, et croire qu'il supprime toute possibilité de distinguer les ensembles ou espaces d'après le nombre de leurs dimensions. En effet, on a démontré qu'une telle correspondance entre deux continus d'un nombre différent de dimensions ne peut pas être à la fois biuniforme et continue. Si elle est continue, comme la précédente, elle peut bien être uniforme, mais non biuniforme. Si elle est biuniforme, c'est-à-dire si elle manifeste l'égalité de nombre des éléments des deux continus, elle ne peut pas être continue, c'est-à-dire qu'elle ne conserve pas les relations de voisinage entre les points; elle ne respecte pas leur ordre et leurs connexions. Cette proposition a été démontrée successivement par MM. THOMAE[2], NETTO[3], G. CANTOR[4]. Ces démonstrations ont paru insuffisantes à M. JÜRGENS[5], qui les a récemment complétées et corroborées. On peut présenter sa démonstration sous une forme élémentaire et presque intuitive. Il ne peut pas y avoir de correspondance biuniforme et continue entre les points d'un segment rectiligne et ceux d'un carré: telle est la proposition à prouver. En effet, supposons qu'au point P du carré corresponde le point Q du segment (fig. 4); à un segment quelconque AB tracé dans le carré et contenant le point P devra correspondre sur la droite un segment CD contenant le point Q *et continu* (en vertu de la continuité supposée de la correspondance). Mais alors, si l'on considère un point M du carré aussi voisin qu'on voudra du point P, mais non sur AB, il ne pourra pas lui correspondre un point aussi

1. Cf. SCHÖNFLIES, *Beiträge zur Theorie der Punktmengen*, ap. *Math. Annalen*, t. LVIII, p. 295-334 (1904).
2. *Göttinger Nachrichten*, 1878.
3. *Journal de Crelle*, t. LXXXVI.
4. *Göttinger Nachrichten*, 1879.
5. *Der Begriff der n-fachen stetigen Mannigfaltigkeit*, ap. *Jahresbericht der deutschen Math.-Vereinigung*, t. VII, p. 50-55 (1899).

voisin qu'on voudra de Q, car ce point devrait se trouver sur CD, ce qui est contraire à l'uniformité de la correspondance (les points de CD correspondant déjà tous aux points de AB ne peuvent pas correspondre à d'autres points du carré). Si donc celle-ci est biuniforme, elle ne peut pas être continue [1].

D'ailleurs, la correspondance de M. Peano n'est continue que dans un sens; à des points voisins du segment correspondent des points voisins du carré, mais non inversement : à une



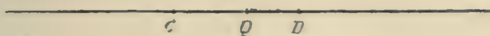


Fig. 4.

ligne continue tracée dans le carré correspond sur le segment un ensemble de points qui n'est dense nulle part, et qui par conséquent ne peut être ni continu ni composé d'éléments continus. En un mot, une telle correspondance ne peut pas conserver toutes les relations de voisinage entre les points du carré; elle en conserve quelques-unes (et c'est ce qui fait que la courbe est continue), mais elle en détruit d'autres. Chacun sent, plus ou moins confusément, qu'un point d'une surface a plus de points voisins qu'un point d'une droite. C'est ce fait qu'exprime la démonstration de M. Jürgens.

Ainsi les continus d'un nombre différent de dimensions ne

1. Cf. L. Milesi, *Sulla impossibile coesistenza della univocità e della continuità nella corrispondenza che si puo stabilire fra due spazi continui ad un numero differente di dimensioni*, ap. *Rivista di Matematica*, t. II, p. 103 (1892).

sont équivalents et indiscernables qu'au point de vue du nombre cardinal de leurs éléments; ils se distinguent au contraire les uns des autres par leurs propriétés ordinales. Un segment, un carré, un cube ne diffèrent nullement l'un de l'autre comme classes de points; ils ne diffèrent que par l'ordre et l'arrangement de leurs points, c'est-à-dire en définitive par les relations établies entre eux, puisque tout ordre consiste en un système de relations. Par conséquent, ce qui constitue proprement et essentiellement les continus à plusieurs dimensions (comme le continu linéaire), ce n'est pas un ensemble de points, mais un ensemble de relations. Ce fait a une portée philosophique manifeste; il signifie, en somme, que l'espace n'est pas une simple « multiplicité », mais bien une multiplicité *ordonnée*; et il justifie la conception de Leibniz, qui voyait dans l'espace, avant tout, un *ordre*.

Voici donc comment il convient de définir les ensembles à plusieurs dimensions. Un ensemble à une dimension est une *suite simple*, dont les éléments sont des individus absolus (des points). Un ensemble à deux dimensions est une *suite double*, c'est-à-dire dont les éléments sont à leur tour des suites simples. Un ensemble à trois dimensions est une *suite triple*, dont les éléments sont des suites doubles; et ainsi de suite. Ou plutôt, puisque toute suite consiste, au fond, en une relation asymétrique transitive qui en ordonne les éléments, un ensemble à une dimension est une relation de ce type dont les termes sont des individus absolus (ne sont pas des relations). Un ensemble à deux dimensions est une relation dont les termes sont eux-mêmes des relations, c'est-à-dire une relation de relations. Un ensemble à trois dimensions est une relation dont les termes sont des relations de relations; et ainsi de suite. L'ensemble sera continu, si chacune des suites ou des relations qui le composent est continue. Et comme la continuité est définie d'une manière purement ordinale, on voit que cette définition n'implique que des notions ordinales, et consiste entièrement en des relations[1].

1. Russell, *op. cit.*, § 354.

Mais, par cela même, cette définition implique un ordre déterminé entre les dimensions : seules, les suites correspondant à la 1re dimension sont des suites simples; à la 2e dimension correspondent des suites doubles, à la 3e des suites triples, etc. Et c'est une question de savoir si les mêmes éléments (points) peuvent former des suites simples par rapport à la 2e, à la 3e,... dimension. Cette propriété consiste en ce fait, que le champ d'une relation de relations peut être le champ d'une autre relation de relations; en d'autres termes, le même ensemble qui a pu être ordonné d'abord suivant une dimension, puis suivant une autre, pourra être ordonné d'abord suivant la seconde et ensuite suivant la première ; de sorte que les dimensions seront commutables. Par exemple, un ensemble à 2 dimensions pourra être considéré, soit comme une suite U de suites u_1 u_2 u_3... correspondant à la 1re dimension, soit comme une suite V de suites v_1 v_2 v_3... correspondant à la 2e. Or l'ensemble peut être considéré comme constitué par l'entre-croisement des suites de premier ordre : u_1 u_2 u_3... et v_1 v_2 v_3..., au lieu d'être constitué par la succession des unes *ou* des autres. Pour plus de clarté, nous appellerons ces suites des *lignes*, et l'ensemble qu'elles composent une *surface*. Soit donc une surface S qu'on peut constituer, soit avec le faisceau des lignes u, soit avec le faisceau des lignes v; ces deux faisceaux, par cela seul qu'ils appartiennent à la même surface, auront les propriétés suivantes[1] :

1° Tout point de S appartient à une ligne u et à une ligne v. En effet, l'ensemble S peut être défini, soit comme suite des u, soit comme suite des v : il faut donc que chacun de ses points appartienne à une des lignes u et à une des lignes v.

2° Réciproquement, une ligne u et une ligne v ont toujours un point commun. Car si un point de S appartenait à une ligne u, par exemple, sans appartenir à une ligne v, cela signifierait que l'ensemble des lignes v n'épuise pas l'ensemble des points de S, contrairement à l'hypothèse.

1. F. Enriques, *Sulle ipotesi che permettono l'introduzione delle coordinate in una varietà a più dimensioni*, ap. *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. XII (1898).

3° Soient v_1 v_2 deux lignes du faisceau v, a_1 b_1 c_1... des points de v_1, a_2 b_2 c_2... les points où v_2 rencontre les lignes u qui passent respectivement par a_1 b_1 c_1...; l'ordre des points a_2 b_2 c_2... est le même que celui des points a_1 b_1 c_1... En effet, il est le même que celui des lignes u correspondantes. En somme, chaque ligne u établit entre les lignes v le même ordre que la suite V, et chaque ligne v établit entre les lignes u le même ordre que la suite U. Chaque ligne u rencontre en un seul point chaque ligne v : on dit que les deux faisceaux sont *unisécants.*

Cela posé, on peut faire correspondre l'ensemble des nombres réels tant aux points d'une ligne u (soit u_0) qu'aux points d'une ligne v (soit v_0), de telle sorte que l'ordre des nombres soit le même que celui des points (ces deux ordres étant continus). C'est là, comme on sait, le procédé habituel pour représenter les points d'une surface au moyen de deux coordonnées : chaque point de S étant l'intersection d'une ligne u et d'une ligne v, ses coordonnées seront les deux nombres réels qui correspondent respectivement à ces deux lignes. Mais la correspondance ainsi établie n'est pas nécessairement continue[1]; pour qu'elle le soit, il suffit d'admettre que la surface S porte un troisième faisceau de lignes w, qui est unisécant par rapport aux deux premiers u, v. C'est à cette condition que l'ensemble des points de la surface S pourra être représenté d'une manière *continue* par l'ensemble des systèmes de deux nombres réels, en d'autres termes, que la surface S pourra être représentée par deux coordonnées.

1. Une correspondance entre deux ensembles ordonnés est *continue*, si à des points voisins de l'un correspondent des points voisins de l'autre; autrement dit, si aux points de l'un qui ont pour limite le point P, correspondent des points de l'autre ayant pour limite le point P′ correspondant à P. Par exemple, on peut concevoir sur la surface une ligne qui soit *continue en soi*, c'est-à-dire un ensemble de points possédant *entre eux* un ordre continu, mais qui ne soit pas *continue sur la surface*, c'est-à-dire telle que les points voisins sur la ligne soient aussi voisins sur la surface. Une ligne sera continue sur la surface, si elle a un point commun avec chaque ligne u et avec chaque ligne v, et si les lignes de chaque faisceau qui passent par certains de ses points ont, dans leur faisceau, le même ordre que ces points (Enriques, *op. cit.*, § 3). On voit que cette nouvelle espèce de continuité est encore définie d'une manière purement ordinale.

De même, étant donné un ensemble à 3 dimensions défini (à la manière de Riemann) comme une suite simple de surfaces (ensembles continus à 2 dimensions), on peut montrer d'abord qu'il est constitué par 3 faisceaux de surfaces α, β, γ (les surfaces α et β se coupant suivant les lignes c, les surfaces β et γ suivant les lignes a, et les surfaces γ et α suivant les lignes b), car, si α est le faisceau générateur, chaque point d'une surface α est l'intersection d'une ligne b et d'une ligne c de cette surface (dont les faisceaux entre-croisés la constituent), et se trouve en même temps sur une des lignes a qui correspondent à la troisième dimension. Or cette ligne a détermine avec cette ligne b une surface du faisceau γ, et avec cette ligne c une surface du faisceau β. Cet ensemble étant ainsi défini, on pourra le représenter d'une manière continue par trois coordonnées (attachées respectivement aux surfaces α, β et γ), s'il existe un quatrième faisceau de surfaces δ qui coupent les surfaces α, β, γ suivant des lignes, et les lignes a, b, c en des points uniques [1].

Telle est la condition (suffisante, sinon nécessaire) pour qu'un ensemble à plusieurs dimensions défini par des suites linéaires continues soit lui-même continu. Il ne suffit pas, en effet, qu'il soit constitué par des faisceaux séparément continus : il faut encore qu'il y ait continuité entre les divers faisceaux, et cette continuité est assurée ou manifestée par celle d'un faisceau supplémentaire qui coupe obliquement les autres, et établit par là entre eux une correspondance pour ainsi dire diagonale.

La correspondance établie entre chaque point d'un ensemble à plusieurs dimensions et le système des nombres réels qui sont ses coordonnées est, sinon l'origine, du moins la raison d'être des *nombres complexes*. Un nombre complexe à n dimensions, en effet, est, comme on dit, le système de n nombres réels pris dans un ordre déterminé ; or, quelle raison aurait-on de former et de considérer de tels systèmes, si ce n'est pour représenter les éléments d'un ensemble à n dimensions? L'ordre

1. Enriques, *op. cit.*, § 14.

qu'on leur assigne n'a d'autre but que de déterminer à quelle dimension chacun d'eux correspond. On y arrive aussi en considérant chacun d'eux comme le coefficient d'une unité spéciale, qu'on peut alors permuter avec les autres (tout en lui conservant son indice ou numéro), et concevoir ainsi les nombres complexes comme relatifs « à n unités principales ». Dans tous les cas, ce qui fait l'unité du nombre complexe et le lien entre les nombres réels qui le composent, c'est le fait qu'il représente un élément unique et déterminé d'un ensemble à n dimensions.

Il convient de définir plus rigoureusement les nombres complexes; en effet, dire qu'un nombre complexe est le système de n nombres réels, c'est exclure, semble-t-il, le cas où 2 ou plusieurs de ces nombres seraient égaux (c'est-à-dire identiques). Il vaut donc mieux dire qu'un nombre complexe est une relation couniforme entre les nombres réels et les n premiers nombres entiers (ou une relation uniforme entre les n premiers nombres entiers et les nombres réels). En effet, dans un nombre complexe $(x_1, x_2, \dots x_n)$, chaque élément est un nombre réel fonction de son indice $(1, 2, \dots n)$, et cette fonction est couniforme, c'est-à-dire qu'à chaque indice correspond un seul nombre réel; mais un même nombre réel peut correspondre à plusieurs indices [1].

Nons avons dit que la Géométrie élémentaire n'a pas besoin des notions de ligne et de surface en général. Il y a pourtant une branche de la Géométrie où l'on considère les lignes et les surfaces comme telles; c'est ce que RIEMANN appelait l'*Analysis situs*, d'un terme emprunté à LEIBNIZ, mais employé dans un autre sens [2]. Il entendait par là l'étude des « grandeurs con-

1. RUSSELL, *op. cit.*, § 360.

2. Comme RIEMANN en convient lui-même : « Bei der Untersuchung der Functionen, welche aus der Integration vollständiger Differentialien entstehen, sind einige der *Analysis situs* angehörige Sätze fast unentbehrlich. Mit diesem von LEIBNITZ, wenn auch vielleicht nicht ganz in derselben Bedeutung, gebrauchten Namen darf wohl ein Theil der Lehre von den stetigen Grössen bezeichnet werden, welcher die Grössen nicht als unabhängig von der Lage existirend und durch einander messbar betrachtet, sondern von den Massverhältnissen ganz absehend, nur ihre

tinues », considérées, non dans leurs relations métriques, mais seulement dans leurs relations de lieu et de situation réciproque. Cette définition contient un mot de trop : « grandeur », car précisément l'*Analysis situs* fait complètement abstraction de la grandeur; et elle ne distingue pas suffisamment cette science de la Géométrie projective, qui est aussi une étude des relations de situation [1]. Pour plus de précision et de commodité, nous appellerons cette science la *Topologie*, avec certains auteurs allemands et anglais [2].

M. Enriques l'appelle la *théorie des connexions* [3]; et c'est en effet ainsi que Riemann l'a entendue, pour les besoins de sa théorie des fonctions. Il distingue les surfaces simplement connexes et les surfaces multiplement (doublement, triplement,...) connexes. Une surface simplement connexe est une surface telle qu'une courbe fermée tracée sur elle enferme une portion de cette surface. Si sur une surface on peut mener n courbes fermées qui, séparément ou réunies, n'enferment aucune portion de cette surface, mais qui, avec toute autre courbe fermée, en enferment une portion, la surface est $(n+1)$-uplement connexe. Une surface $(n+1)$ -uplement connexe se transforme en une surface n-uplement connexe au moyen d'une coupure quelconque, pourvu que celle-ci ne la partage pas, et par suite peut être transformée en une surface simplement connexe

Orts- und Gebietsverhältnisse der Untersuchung unterwirft. » *Theorie der Abelschen Functionen*. § 2, ap. *Journal de Crelle*, t. LIV (1857). Dans sa fameuse dissertation *Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen* (1854), Riemann fait allusion à la même science (I, § 1), et dit que l'on n'y peut comparer deux grandeurs entre elles que si l'une est partie de l'autre. Ce qu'il entend par les « relations de région » (Gebietsverhältnisse), c'est donc la relation de contenant à contenu ou de tout à partie, qui est la relation fondamentale du Calcul des classes. Ainsi conçue, la Topologie se confondrait avec la théorie des ensembles.

1. En fait, c'est à la Géométrie projective ou à la Géométrie descriptive que correspondait l'*Analysis situs* de Leibniz.

2. Il importe d'avoir un mot simple, pour pouvoir en former des dérivés (*topologique* . Pour la même raison, il conviendrait d'avoir un mot simple pour désigner la théorie des ensembles (et pouvoir traduire, par exemple, l'adjectif allemand *mengentheoretisch*).

3. *Questioni riguardanti la Geometria elementare*, art. I, § 4 (Bologna, 1900); *Sulla spiegazione psichologica dei postulati della Geometria*, ap. *Rivista filosofica* (mars-avril 1901).

au moyen de n coupures. Cela posé, l'objet essentiel de la Topologie, ce sont les connexions des surfaces et, plus généralement, les relations de contiguïté et de continuité entre les points des lignes et des surfaces, abstraction faite de la grandeur de ces figures et même de leur forme. Plus précisément, les connexions sont les invariants des transformations biuniformes et continues, de sorte que ces transformations sont les seules qu'admette la Topologie. Qu'on imagine un écheveau de fils emmêlés et noués, une ou plusieurs surfaces tordues et enchevêtrées, et qu'on les déforme sans rien couper ni déchirer (comme si ces fils et ces surfaces étaient réalisés en une matière parfaitement ductile et élastique), sans rien coller non plus : on aura une idée des transformations qui caractérisent la Topologie. Peu importe que les lignes soient droites ou courbes, que les surfaces soient planes ou gauches; peu importe leur grandeur relative, on peut les étendre ou les rétrécir indéfiniment, pourvu qu'on n'y introduise aucune solution de continuité (ni aucune connexion nouvelle). Le nœud gordien était un problème de Topologie; tous les nœuds, toutes les « questions d'Orient » en sont d'autres [1]. Qu'un homme qui a les mains liées puisse retourner son gilet et le mettre à l'envers, c'est une proposition de Topologie.

Mais cette science n'a pas seulement pour objet l'étude des connexions [2], et d'ailleurs la notion de connexion ne peut être considérée comme primordiale. En effet, cette notion se définit, on l'a vu, au moyen de celle de *courbe fermée*; or celle-ci est déjà fort complexe et difficile à définir. Elle donne lieu à une proposition fondamentale de la Topologie, que voici : « Une

1. Une fameuse question de Topologie est le *problème des ponts de Kœnigsberg*, traité par Euler : la ville de Kœnigsberg comprenant une île reliée par plusieurs ponts aux rives de la Pregel, il s'agissait de décrire un chemin fermé qui passât une seule fois par chacun de ces ponts. Voir Rouse-Ball, *Problèmes et récréations mathématiques*, Paris, Hermann, 1898.

2. Par exemple, la question du nombre des couleurs nécessaires pour distinguer les régions d'une carte géographique relève de la Topologie. Voir P. Wernicke, *Ueber den kartographischen Vierfarbensatz*, ap. *Math. Annalen*, t. LVIII (1904), où l'on trouvera une bibliographie de cette question curieuse.

courbe plane fermée partage son plan en deux régions séparées, c'est-à-dire telles que toute ligne continue qui joint un point de l'une à un point de l'autre la traverse nécessairement (a au moins un point commun avec elle) ». Cette proposition semble élémentaire, et a longtemps été admise comme évidente; pourtant (ou plutôt à cause de cela), elle n'a été démontrée que par M. JORDAN [1]; et ce seul fait montre quelle différence il y a entre la rigueur logique et la soi-disant évidence de l'intuition. Encore la démonstration de M. Jordan a-t-elle paru insuffisante à plusieurs mathématiciens, parce qu'elle postule la vérité de la proposition pour le cas d'un polygone simple [2]. Il est vrai que, comme on le verra (p. 172,) on peut la démontrer rigoureusement dans ce cas, au moyen des axiomes de la Géométrie descriptive. On peut aussi, comme fait M. VEBLEN, la démontrer d'une manière générale en donnant de la *courbe simple* une définition non-métrique, ce qui a l'avantage d'affranchir la Topologie de la Géométrie métrique. Enfin M. SCHÖNFLIES a remarqué que cette propriété, qu'une courbe fermée partage le plan en deux régions séparées, n'est pas réciproque, c'est-à-dire qu'il y a des ensembles de points qui partagent le plan de cette manière et qui ne sont pourtant pas des courbes continues [3]; et il définit comme suit la *courbe simple fermée* : « C'est un ensemble de points C parfait, qui partage le plan en deux régions E (extérieure) et I (intérieure), telles que : 1° Deux points quelconques, soit de E, soit de I, peuvent être joints par une ligne simple qui ne rencontre pas C; 2° Tout point de C peut être joint à un point quelconque de E ou de I par une ligne simple contenue tout entière dans E ou dans I ». Des conditions de l'énoncé il résulte qu'un point de E et un point de I peuvent être joints par une ligne simple qui n'a qu'un point commun avec C. Le même auteur démontre que

1. *Cours d'Analyse*, 2e éd., t. I, p. 92.
2. Oswald VEBLEN, *Theory on plane curves in non-metrical Analysis situs*, ap. *Transactions of the American Math. Society*, t. VI, p. 83 (1905).
3. *Ueber einen grundlegenden Satz der Analysis Situs*, ap. *Göttinger Nachrichten*, 1902; *Beiträge zur Theorie der Punktmengen*, ap. *Math. Annalen*, t. LVIII (1904).

toute courbe simple fermée peut se transformer en une circonférence par une transformation biuniforme et continue; de sorte qu'elle est « semblable » ou « équivalente » à une circonférence au point de vue topologique [1]. C'est bien là la notion qu'on s'en fait ordinairement; mais on voit combien il est difficile de définir logiquement une notion qui paraît si simple pour l'intuition.

Telle est la théorie où les notions de ligne en général et de surface en général sont fondamentales. Elle est fort difficile et fort peu avancée, et, comme on voit, elle n'a rien de commun avec la Géométrie élémentaire. Bien plus : elle procède moins de la Géométrie que de l'Analyse, car, si nous ne nous trompons, elle est née surtout de la considération des « chemins » que l'on fait décrire aux variables complexes, et des « surfaces de Riemann » imaginées pour servir de carrière aux diverses « branches » des fonctions. Ainsi c'est la théorie purement analytique des fonctions qui a donné naissance à ces problèmes de situation et de configuration, qui semblent ne relever que de l'intuition.

§ B. — Géométrie projective.

Si on laisse de côté la Topologie, cette branche isolée et encore peu développée de la Géométrie, dont il convenait cependant de marquer la place et le rôle, toutes les théories géométriques se rattachent à trois corps de doctrines qui sont : la Géométrie projective, la Géométrie descriptive et la Géométrie métrique. Ces trois Géométries ne se distinguent pas par leur objet (qui est ou peut être le même), mais par leurs axiomes et surtout par leurs notions premières. Toutes les trois ont pour notion première commune le *point*. Mais la Géométrie projective lui adjoint, comme seconde notion première, la droite projective (illimitée); la Géométrie descriptive, le segment rectiligne; et la Géométrie métrique, la distance, la

1. Cf. G. Combebiac, *Géométrie et Métrique*, ap. *Revue des Idées* (15 mai 1905).

congruence ou le mouvement. Nous allons exposer tour à tour les principes de ces trois doctrines.

La Géométrie projective étudie exclusivement les propriétés projectives des figures, c'est-à-dire celles qui ne varient pas quand on transforme une figure par projection. L'instrument de toute projection est la ligne droite indéfinie; c'est ce qui explique le rôle fondamental qu'elle joue dans cette science. La Géométrie projective s'appelle encore la Géométrie de position, mais cette dénomination est trop large : elle s'appliquerait presque aussi bien à la Topologie et à la Géométrie descriptive. De toutes les positions relatives possibles, la Géométrie projective ne considère que les alignements, c'est-à-dire le fait que plusieurs points appartiennent à une même droite. Pour donner un aperçu de la constitution logique de cette science, nous allons énumérer les postulats qui suffisent à la fonder, et énoncer les principales propositions qui en découlent [1].

Les premiers postulats de la Géométrie projective sont relatifs à la notion indéfinissable de *point* :

« I. Les points forment une classe. »

« II. Il y a (au moins) un point. »

« III. Si *a* est un point, il existe un point différent de *a*. »

1. L'exposé qui suit est le résumé du mémoire de M. PIERI : *I principii della Geometria di posizione composti in sistema logico deduttivo*, ap. *Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino*, ser. II, t. XLVIII (1898). Cf. les mémoires suivants du même auteur : *Sui principii che reggono la Geometria di posizione* et *Sugli enti primitivi della Geometria projettiva astratta*, ap. *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino*, t. XXX-XXXII (1895-97); *Un sistema di postulati per la Geometria projettiva astratta degl' iperspazî*, ap. *Revue de Mathématiques*, t. VI (1896); *Nuovo modo di svolgere deduttivamente la Geometria projettiva*, ap. *Rendiconti del R. Istituto Lombardo*, t. XXXI (1898). Dans ce dernier mémoire, M. PIERI construit toute la Géométrie projective sur les deux notions premières de *point* et d'*homographie*, de même qu'il construit la Géométrie métrique sur les deux notions premières de *point* et de *mouvement* (v. § D). Enfin le même auteur a réduit en forme logique la Géométrie de la droite, ou de l'espace conçu comme ensemble de droites (d'après PLÜCKER) : *Sui principii che reggono la Geometria delle rette*, ap. *Atti della R. Accademia di Torino*, t. XXXVI (1901); et la Géométrie projective complexe, c'est-à-dire comprenant les éléments dits imaginaires (points, droites et plans) : *Nuovi principii di Geometria projettiva complessa*, ap. *Memorie della R. Accademia di Torino*, t. LV (1905).

La ligne droite est, avons-nous dit, la seconde notion indéfinissable. Soient deux points *a* et *b*, il y a une entité qu'on nommera la droite *ab*, et que caractérisent les postulats suivants :

« IV. Si *a* et *b* sont deux points différents, la droite *ab* est une classe. »

« V. Chaque individu de cette classe est un point. »

« VI. Si *a* et *b* sont deux points différents, la droite *ab* est contenue dans la droite *ba* »; d'où il résulte immédiatement qu'elle coïncide avec elle (c'est-à-dire lui est identique); ainsi la droite projective n'a pas de sens déterminé.

« VII. Si *a* et *b* sont des points distincts, *a* appartient à la droite *ab* »; et par suite *b* lui appartient aussi.

« VIII. Si *a* et *b* sont des points distincts, la droite *ab* contient au moins un point distinct de *a* et de *b*. »

On remarquera l'utilité de ces postulats existentiels (II, III, VIII) : dans une théorie rigoureusement logique, on ne considère pas un seul point sans en avoir démontré ou postulé l'existence. Or, pour démontrer l'existence d'un point, il faut avoir quelques postulats existentiels qui affirment que tel point existe si tels autres points existent. Il ne s'agit d'ailleurs que d'une existence logique et idéale; cela revient, au fond, à dire que tel point est déterminé par tels autres points.

« IX. *a* et *b* étant des points distincts, et *c* un point de la droite *ab* distinct de *a*, *b* est un point de la droite *ac*. »

« X. Dans la même hypothèse, la droite *ac* est contenue dans la droite *ab*. » D'où il suit immédiatement que ces deux droites coïncident (sont identiques). On peut démontrer alors que, si *c* et *d* sont deux points distincts de la droite *ab*, celle-ci coïncide avec la droite *cd*; autrement dit, qu'une droite est déterminée par deux quelconques de ses points [1].

On définit alors la relation d'alignement : Trois points sont *collinéaires*, s'ils appartiennent à une même droite. Trois points sont nécessairement collinéaires, si deux d'entre eux coïncident (sont identiques).

1. Ainsi cette propriété de la droite, qui lui sert souvent de définition, peut se déduire de postulats plus simples.

Pour sortir de la droite, et pouvoir considérer plusieurs droites, il faut admettre le postulat existentiel suivant :

« XI. a, b étant des points distincts, il existe au moins un point n'appartenant pas à la droite ab. » D'où l'on peut conclure qu'il existe plusieurs droites (six au moins, en vertu du postulat VIII).

Pour arriver à la notion de plan, il faut encore un postulat :

« XII. a, b, c étant 3 points non collinéaires, a' un point de bc autre que b et c, b' un point de ac autre que a et c, les droites aa' et bb' se rencontrent. » C'est encore un postulat d'existence : « il *existe* un point commun aux droites aa' et bb' ». Ce postulat aura pour conséquence que deux droites quelconques d'un même plan se rencontrent toujours (ce qui exclut la géométrie d'Euclide et celle de Lobatchevskij). Si l'on désigne par abc l'ensemble des points situés sur quelque droite passant par a et par un point de bc, on peut démontrer, au moyen du postulat précédent, les identités suivantes :

$$abc = acb = bac = bca = cab = cba.$$

La figure (ensemble de points) ainsi déterminée sera par définition le *plan* abc (l'ordre de ces trois lettres étant indifférent).

Si d, e, f sont 3 points non collinéaires d'un plan abc, celui-ci coïncide avec le plan def. Autrement dit, un plan est déterminé par 3 de ses points non collinéaires. Il en résulte immédiatement qu'un plan contient toute droite dont il contient deux points. Ainsi se trouve démontrée la propriété dont on se sert ordinairement pour définir le plan.

Introduisons ici une notation dont nous allons avoir besoin. De même que la droite déterminée par deux points s'indique comme le produit de ces points, le point déterminé par deux droites (c'est-à-dire leur intersection) s'indique comme le produit de ces droites. Ainsi $(ab.\ cd)$ représente le point d'intersection des droites ab et cd[1].

On peut maintenant définir le *quatrième harmonique* de trois

1. Cette notation provient du Calcul de l'extension de GRASSMANN.

points collinéaires a, b, c, ou le *conjugué harmonique* de c par rapport à a et b. C'est un point x de la droite ab, tel qu'il existe deux points distincts u ,v n'appartenant pas à ab et alignés avec c, et que les points d'intersection (au. bv), (av. bu) sont alignés avec x (fig. 5). Comme on voit, cette définition n'implique aucune notion ou relation autre que celles que nous avons admises ou définies; elle est purement projective et ne contient aucun élément métrique. Le point x s'obtient, en partant des points a, b, c, au moyen d'une construction que la définition indique et qu'on appelle le *quadrilatère de Staudt*[1]. Il faut

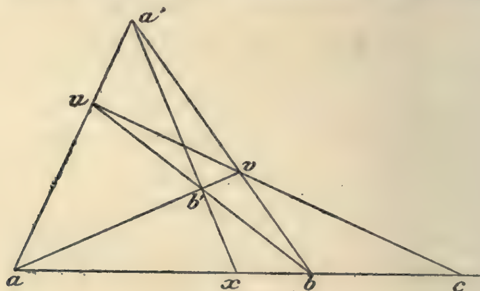


Fig. 5.

remarquer que la définition susdite n'implique nullement que le conjugué harmonique existe, ni qu'il soit unique. On montre d'abord qu'il existe; mais, pour pouvoir démontrer qu'il est unique, il faut sortir du plan et admettre le postulat suivant :

« XIII. a, b, c étant des points non collinéaires, il existe au moins un point qui n'appartient pas au plan abc. »

Ce postulat, joint aux précédents, permet en effet de démontrer le *théorème des triangles homologiques* (dit de Desargues), dont dépend le théorème de l'unicité du conjugué harmonique. C'est un fait très remarquable que le théorème des triangles homologiques *dans le plan*, et par suite l'unicité du quatrième harmonique, qui s'obtient par une construction *plane*, ne puissent se démontrer qu'au moyen du théorème des triangles

1. Quand on considère le *quadrilatère* (ou mieux *quadrangle*) *complet* $a'ub'v$, ses côtés opposés se coupent en a et b, et ses diagonales coupent la droite ab aux points c et x, conjugués harmoniques par rapport à a et b.

homologiques *dans l'espace*, c'est-à-dire d'un appel à la 3e dimension.

La théorie des groupes harmoniques demande qu'on postule encore une proposition qui ne résulte pas logiquement des précédentes, à savoir :

« XIV. *a*, *b*, *c* étant des points collinéaires distincts, leur quatrième harmonique ne coïncide pas avec *c*[1]. »

Ce postulat équivaut à la proposition suivante[2] : « *a*, *b*, *c*, *d* étant les points d'un plan non collinéaires 3 à 3, les points (*ab*. *cd*), (*ac*. *bd*) et (*ad*. *bc*) ne sont pas collinéaires. » (Fig. 6.)

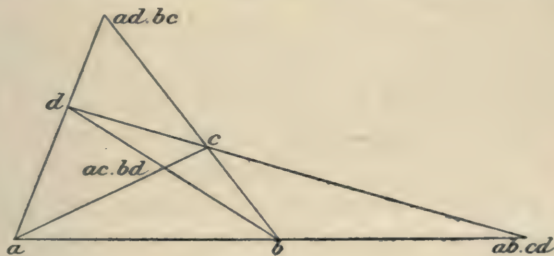


Fig. 6.

Jusqu'ici on a considéré la droite projective dans sa totalité, sans y discerner aucun ordre ni aucune partie. M. Pieri a réussi à y définir le *segment* par des notions purement projectives, c'est-à-dire au moyen de la relation harmonique. Voici comment : « *a*, *b*, *c* étant 3 points collinéaires, le segment *abc* est l'ensemble des points dont chacun est le conjugué harmonique de *b* par rapport à deux points distincts qui sont eux-mêmes conjugués harmoniques par rapport à *a* et *c*. » Autrement dit, soient *y* et *z* deux points conjugués harmoniques par rapport à *a* et *c*; le conjugué harmonique de *b* par rapport à *y* et *z* appartiendra, par définition, au segment *abc*.

1. C'est M. Fano qui a prouvé la nécessité de ce postulat, c'est-à-dire son indépendance logique par rapport aux précédents : *Sui postulati fondamentali della Geometria projettiva*, ap. *Giornale di Matematiche*, t. XXX (1891).

2. Il équivaut encore à cette proposition plus simple : « Il y a une droite qui contient plus de 3 points. » (Russell, *op. cit.*, p. 385, note 1.)

Pour expliquer cette définition en termes ordinaires, il faut concevoir la droite projective comme une ligne fermée; par suite, deux points distincts *a*, *c* y déterminent deux segments (comme sur une circonférence); pour distinguer ceux-ci, il faut donner un 3[e] point *b* distinct des deux premiers; le segment *abc* sera celui des deux segments déterminés par *a* et *c* qui contient le point *b*. Les points *a* et *c* en seront les extrémités[1]; il est à remarquer qu'ils n'appartiennent pas au segment *abc*, tandis que le point *b* lui appartient. Le segment est symétrique par rapport à ses extrémités, c'est-à-dire que le segment *abc* est identique au segment *cba*.

Le segment ainsi défini jouit de la propriété projective, ou, comme on dit, se conserve par projection. Cela veut dire exactement ceci : Soient *a*, *b*, *c*, *d* 4 points d'une droite, a', b', c', d' les projections des précédents sur une autre droite (c'est-à-dire que les droites aa', bb', cc', dd' concourent en un même point). Si le point *d* appartient au segment *abc*, le point d' appartiendra au segment $a'b'c'$, et réciproquement.

On peut maintenant définir la relation de *séparation* entre 4 points d'une droite projective[2]. Si le point *d* n'appartient pas au segment *abc* et ne coïncide ni avec *a* ni avec *c*, on dira que les points *a* et *c* séparent les points *b* et *d*. On peut démontrer que cette relation est symétrique, tant par rapport aux deux points de chaque couple que par rapport aux deux couples. Cette relation est projective, comme le segment même.

D'ailleurs, la notion de segment projectif n'est qu'une autre forme de la notion de séparation : car la définition même du segment repose sur cette propriété connue de la relation de séparation : « Si deux couples de points tous distincts sur une droite se séparent mutuellement, il n'existe pas de couple de points conjugués harmoniques par rapport à chacun des deux premiers; et réciproquement. »

1. Il est à peine besoin de faire remarquer que cette explication suppose connu l'*ordre* des points de la droite, ordre que la définition en question a au contraire pour but de déterminer.

2. Cf. Chap. III, § A (p. 72).

« XV. *a*, *b*, *c* étant 3 points distincts d'une droite, si un point *d* de cette droite, distinct de *a* et de *c*, n'appartient pas au segment *abc*, il appartient au segment *bca*. »

De ce postulat on déduit que, dans la même hypothèse, *d* appartiendra au segment *cab*, *c* au segment *abd*, *b* au segment *acd*, et *a* au segment *cbd* (v. fig. 7).

« XVI. *a*, *b*, *c* étant 3 points distincts d'une droite, si un point *d* appartient à la fois aux segments *bca* et *cab*, il ne pourra appartenir au segment *abc* [1]. » Ce postulat revient à dire que, si les couples (*a*, *c*) et (*b*, *d*) se séparent mutuellement, les couples (*a*, *b*) et (*c*, *d*) ne peuvent pas se séparer, non plus

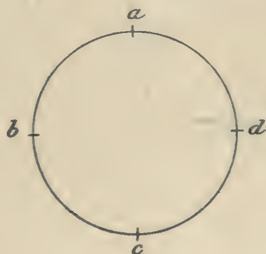


Fig. 7.

que les couples (*a*, *d*) et (*b*, *c*). En d'autres termes, quatre points d'une droite ne peuvent se répartir que d'une seule manière en couples séparés. On peut alors démontrer que le conjugué harmonique de *c* par rapport à *a* et *b* est séparé de *c* par *a*, *b*.

« XVII. *a*, *b*, *c* étant des points collinéaires distincts, *d* un point du segment *abc*, et *e* un point du segment *adc* : le point *e* appartient au segment *abc*. »

Ce postulat revient à dire : si les points *a* et *c* ne sont pas séparés par *b* et *d*, ni par *d* et *e*, ils ne sont pas séparés non plus par *b* et *e*. Il permet d'établir que la droite est une ligne fermée, qu'elle contient une infinité de points, et qu'elle est divisée par deux de ses points en deux segments. On peut

1. Ainsi, des 3 segments *abc*, *bca*, *cab* qu'on peut distinguer sur la droite, deux et deux seulement peuvent contenir un point quelconque.

alors définir l'ordre naturel des points d'une droite, et y distinguer deux sens inverses[1]. Ces notions ordinales ne jouent d'ailleurs aucun rôle dans la démonstration des propositions suivantes (elles reparaissent seulement dans le postulat de continuité XVIII); mais il est intéressant de savoir qu'on peut les définir au moyen des seules notions projectives que nous avons citées[2].

De la notion du segment projectif dérivent les notions du *triangle* et du *tétraèdre projectifs*. Soient 3 points non colli-

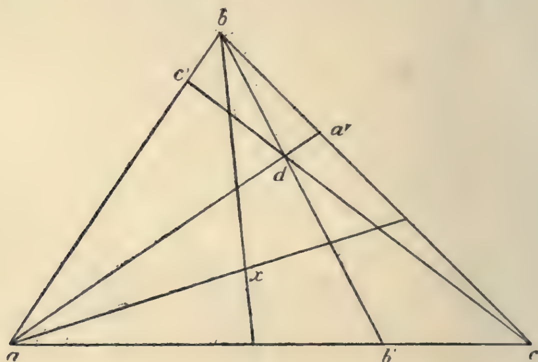


Fig. 8.

néaires a, b, c, et d un point du plan abc non situé sur ab, bc ou ca; soit a' le point ($bc.\ ad$), b' le point ($ca.\ bd$); le triangle projectif $abcd$ est le lieu des points x tels que les droites ax, bx rencontrent les droites bc, ca respectivement à l'intérieur des segments $ba'c$, $cb'a$ (fig. 8). Le triangle ainsi défini est contenu dans le plan abc; il contient en particulier le point d qui sert à le définir, mais non ses 3 côtés ab, bc, ca, ni par suite ses 3 sommets a, b, c. On démontre que cette définition est symétrique

1. Plus précisément, on définit la relation binaire : « Le point x suit le point y dans l'ordre des points a, b, c. » Ainsi il faut donner 3 points d'une droite pour y déterminer un ordre (Cf. Chap. III, § A, p. 69).

2. Ces propriétés ordinales de la droite (plus généralement, des formes de 1re espèce) constituent le postulat V de M. Enriques (*Sui fondamenti della Geometria projettiva*, 1894) qui définit « la disposition circulaire des éléments » de la droite, à deux sens inverses l'un de l'autre.

par rapport aux 3 sommets et aux 3 côtés; d'où l'on conclut que, si c' est le point $(ab.\ cd)$, le triangle *abcd* est le lieu des points qui sont projetés des 3 sommets respectivement sur les côtés opposés, c'est-à-dire sur les segments $ba'c$, $cb'a$, $ac'b$.

Trois points d'un plan déterminent quatre triangles projectifs, qui se distinguent par la situation du 4[e] point *d*. C'est pourquoi il est nécessaire (et suffisant), pour déterminer chacun d'eux, de donner, outre les 3 sommets, un point quelconque de son intérieur [1]. Dans la figure 9, ces quatre triangles (entre lesquels tout le plan est réparti) sont représentés par la région blanche et les régions diversement hachurées [2].

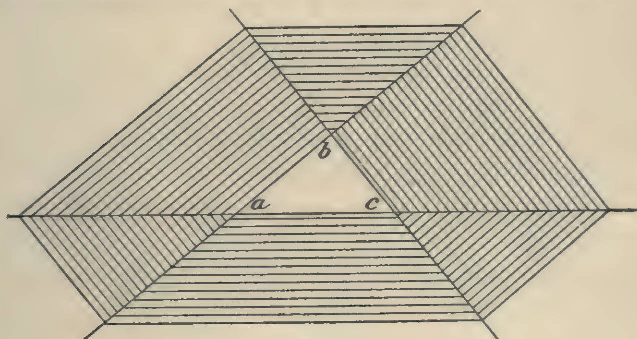


Fig. 9.

On démontre qu'une droite qui rencontre un des côtés d'un triangle (c'est-à-dire qui a un point commun avec lui) en rencontre également un second; qu'une droite qui rencontre deux côtés d'un triangle ne rencontre pas le 3[e] (mais bien son prolongement); qu'une droite quelconque du plan d'un triangle rencontre deux de ses côtés ou n'en rencontre aucun; enfin,

1. De même que pour déterminer un segment il faut donner, outre ses extrémités, un point de son intérieur.

2. Chaque côté détermine deux triangles avec l'angle correspondant (formé de deux angles simples opposés par le sommet); cela fait 6 triangles, mais trois d'entre eux coïncident ($abc = cab = bca$), ce qui réduit leur nombre à quatre. On peut encore concevoir (moins symétriquement) ces triangles comme les parties communes à deux angles ayant pour sommets respectifs *a* et *b*. Comme il y a deux angles pour chacun de ces sommets, cela fait quatre combinaisons, qui sont les quatre triangles.

que sur les 4 triangles déterminés par 3 points ou par 3 droites d'un plan, une droite de ce plan pénètre dans 3 d'entre eux, mais non dans le 4e.

On peut alors définir et étudier les *transformations segmentaires*, c'est-à-dire celles qui transforment un segment en un segment : a, b, c, d étant 4 points d'une droite et a', b', c', d' les 4 points correspondants (d'une autre droite), si d appartient au segment abc, d' appartiendra au segment $a'b'c'$.

Il importe ici de postuler la *continuité* des segments, au moyen d'un axiome analogue à celui de M. Dedekind, et que M. Pieri formule comme suit [1] :

« XVIII. Si le segment abc est divisé en deux parties X, Y dont chacune contient au moins un point, et telles que tout point x de X précède tout point y de Y dans l'ordre abc [2], il existe (au moins) un point z du segment abc tel que tout point de abc qui le précède appartient à X, et que tout point de abc qui le suit appartient à Y [3]. »

On démontre ensuite que le point z ainsi défini est unique : c'est la limite commune des deux ensembles X, Y.

On établit alors le *théorème du point double* : « Soit un segment abc qu'une transformation segmentaire biuniforme transforme en un segment $a'b'c'$ contenu dans abc ; il existe dans $a'b'c'$ un point double (c'est-à-dire qui coïncide avec le point correspondant de abc) tel qu'il n'est précédé d'aucun point double dans abc [4]. »

La relation harmonique fournit une transformation segmen-

1. M. Pieri a montré tout récemment (*Circa il teorema fondamentale di Staudt e i principii della Geometria projettiva*, ap. *Atti dell'Academia delle Scienze di Torino*, 1904) que, pour établir le théorème de Staudt, il suffit d'admettre un postulat moins « fort » que le postulat XVIII, qui n'implique pas la continuité, et qui, fournissant seulement un ensemble dénombrable de points, permet de fonder la Géométrie projective du 1er et du 2e degrés (comprenant seulement les opérations rationnelles et l'extraction de la racine carrée).

2. Rappelons qu'on a défini l'ordre des points d'un segment par rapport à 3 points fixes a, b, c (v. p. 150, note 1).

3. Ce *postulat de la continuité* a été formulé de la même manière par F. Enriques, *Sui fondamenti della Geometria projettiva* (1894).

4. Enriques, *op. cit.*, § 9 ; Pieri, *op. cit.*, § 9.

taire d'une droite en elle-même, qui consiste à échanger entre eux les points conjugués par rapport à deux points fixes; c'est ce qu'on appelle une transformation harmonique.

On peut alors démontrer le *théorème de Staudt* : Toute transformation harmonique qui contient trois points doubles est une identité; autrement dit, si dans une transformation harmonique 3 points coïncident avec leurs correspondants, tous les autres points coïncident avec leurs correspondants [1].

De ce théorème il résulte qu'une transformation harmonique est déterminée par 3 points. C'est le théorème fondamental de la Géométrie projective [2]. C'est lui qui permet d'appliquer les nombres réels aux figures projectives, et d'établir ainsi les coordonnées projectives, sans l'intervention d'aucune notion métrique [3]. Par suite, une fois cette application faite, toute question de Géométrie projective se réduit (comme dans la Géométrie analytique cartésienne) à une question d'Algèbre, résoluble par des moyens purement analytiques (c'est-à-dire logiques). Ainsi les 18 postulats précédents suffisent à fonder la Géométrie projective de l'espace général à n dimensions.

Si l'on veut se restreindre à l'espace ordinaire à 3 dimensions, on devra admettre un postulat de plus :

« XIX. a, b, c, d étant 4 points non dans un même plan,

1. Staudt, *Geometrie der Lage*, § 106 (1847) ; Pasch, *Vorlesungen über neuere Geometrie*, p. 126 (1882) ; Enriques, *op. cit.*, § 14; Pieri, *op. cit.*, § 10.

2. M. Wiener a affirmé que le théorème fondamental de la Géométrie projective peut se démontrer sans aucun postulat de continuité, au moyen des théorèmes de Desargues et de Pascal (*Ueber die Grundlagen und den Ausbau der Geometrie*, ap. *Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung*, t. I, p. 47; t. III, p. 70); et M. Schur a effectué cette démonstration (*Ueber den Fundamentalsatz der projectiven Geometrie*, ap. *Mathematische Annalen*, t. LI, p. 401-409; 1899); *Ueber die Grundlagen der Geometrie*, § 2, ap. *Math. Ann.*, t. LV, 1902). Mais les théorèmes invoqués reposent sur les axiomes de congruence, qui appartiennent à la Géométrie *métrique*. M. Balser a au contraire démontré le théorème fondamental au moyen du postulat de continuité de Dedekind (c'est-à-dire de la continuité *ordinale*), sans invoquer la continuité géométrique, c'est-à-dire *métrique* (*Ueber den Fundamentalsatz der projectiven Geometrie*, ap. *Mathematische Annalen*, t. LV, p. 293-300; 1902).

3. Cette question des coordonnées projectives, sur laquelle nous ne voulons pas insister, parce qu'elle a surtout un intérêt technique, a été traitée à fond par Pasch, *op. cit.*, § 22.

et *e* un 5[e] point non situé dans aucun des plans *abc*, *abd*, *acd*, *bcd*, il existe un point commun à la droite *ae* et au plan *bcd*. »

Ce postulat signifie qu'un plan et une droite ont toujours un point commun ; ce qui équivaut à dire que l'espace n'a que 3 dimensions. On en déduit que deux plans ont toujours une droite commune.

La limitation à 3 du nombre des dimensions a pour effet d'établir entre les points et les plans la dualité si remarquable qui caractérise la Géométrie projective ordinaire, et qui consiste en ce que toute proposition projective donne lieu à une autre proposition également vraie, si l'on y remplace les *points* par des *plans*, les *plans* par des *points*, et si l'on conserve les *droites* avec les relations qu'elles soutiennent, soit avec les points, soit avec les plans[1]. Cette réciprocité vient, comme l'explique M. Pieri, de ce fait que, les notions indéfinissables de la théorie étant celles de *point* et de *droite* (série de points), dont le sens, dès lors, est indifférent à la vérité de la théorie, celle-ci reste vraie si l'on donne à ces entités un autre sens qui vérifie les mêmes relations (énoncées dans les postulats). Or on peut leur donner respectivement le sens de *plan* et de *faisceau de plans* (passant par une droite), ce qui fait que tout théorème vrai pour les points et les droites qui les joignent est encore vrai pour les plans et les droites qui en sont l'intersection.

Cette dualité générale a pour conséquence deux dualités spéciales, l'une dans les figures planes, l'autre dans les figures centrales (c'est-à-dire dont tous les éléments passent par un même point appelé centre)[2]. En effet, il y a réciprocité entre les figures planes et les figures centrales, celles-là étant caractérisées par le fait qu'elles sont situées dans un seul et même *plan*, et celles-ci par le fait qu'elles passent par un seul et même *point*. Par suite, la figure réciproque d'une figure plane

1. Deux plans, comme deux points, déterminent une droite ; trois plans qui n'ont pas une droite commune déterminent un point, comme trois points non en ligne droite déterminent un plan, etc.

2. Les figures centrales sont : le faisceau de droites, le faisceau de plans, la gerbe de droites et la gerbe de plans.

est une figure centrale, et *vice versa*[1]. Mais, d'autre part, une figure plane est la section d'une figure centrale (par un plan donné), et une figure centrale est la projection d'une figure plane (depuis un point donné)[2]. Cela étant, toute relation entre points et droites, dans un plan, se traduit par une relation de même forme entre droites et plans dans une figure centrale (les droites étant les *projections* des points, et les plans étant les *projections* des droites). Mais, par dualité, cette dernière relation correspond à une autre relation entre droites et points dans un même plan (plan correspondant au centre de la figure centrale). Ainsi la même relation qui existe entre les points et les droites d'un plan existe entre les droites et les points d'un autre (ou du même) plan, les droites correspondant aux points et les points aux droites. C'est en cela que consiste la *dualité dans les figures planes*.

De même, toute relation entre les éléments d'une figure centrale (composée de droites et de plans) se traduit par une relation de même forme entre les points et les droites qui en sont les *sections* planes. Mais, par dualité, cette dernière relation correspond à une autre relation entre plans et droites d'une même figure centrale (dont le centre correspond au plan précédent). Ainsi la même relation qui existe entre les droites et les plans d'une figure centrale existe entre les plans et les droites d'une autre (ou de la même) figure centrale, les plans correspondant aux droites et les droites aux plans. Telle est la *dualité dans les figures centrales*, réciproque de la dualité dans les figures planes[3].

La dualité de la Géométrie projective offre un grand intérêt

1. Le faisceau de plans est la figure réciproque de la droite (comme ensemble de points); la gerbe de droites est la réciproque du plan (comme ensemble de droites) et la gerbe de plans la réciproque du plan (comme ensemble de points); enfin le faisceau de droites est la réciproque du faisceau de droites.

2. Le faisceau de droites est la projection de la droite (comme ensemble de points); le faisceau de plans est la projection du faisceau de droites; enfin la gerbe de droites et la gerbe de plans sont les projections du plan considéré respectivement comme ensemble de points et comme ensemble de droites.

3. Pasch, *op. cit.*, § 12; Enriques, *op. cit.*, § 15; Pieri, *op. cit.*, § 11.

philosophique, car c'est elle qui paraît avoir suggéré aux mathématiciens cette pensée capitale, que la vérité des propositions de la Géométrie (et en général des Mathématiques) ne dépend pas du *sens* des notions premières, mais seulement de leurs relations fondamentales (énoncées dans les définitions et les postulats); que, par suite, ces propositions sont des conséquences *formelles* de ces postulats, et que toute la Géométrie peut se déduire logiquement de ceux-ci[1]. A présent, du reste, il ne s'agit plus d'une simple possibilité théorique : cette déduction logique a été effectuée par les géomètres que nous avons cités, et surtout par M. Pieri, au moyen de la Logique symbolique de M. Peano, qui en garantit la valeur formelle et apodictique.

Si l'on ne veut pas se limiter à 3 dimensions, on pourra (en se passant du postulat XIX) définir l'*hyperplan projectif* du 3e ordre comme la projection d'un plan *bcd* à partir d'un point *a* extérieur à ce plan. On démontrera que cette figure est la même que celle qu'on obtiendrait en projetant le plan *acd* depuis le point *b*, ou le plan *abd* depuis le point *c*, ou le plan *abc* depuis le point *d*; et on la désignera par *abcd* (*a*, *b*, *c*, *d* n'étant pas dans un même plan). On établira qu'un tel hyperplan est déterminé par 4 quelconques de ses points non situés dans un même plan. On pourra démontrer, *sans le postulat XIX*, que, *dans un même hyperplan*, un plan et une droite ont un point commun, et deux plans une droite commune; de sorte que le postulat XIX (des 3 dimensions) revient à dire qu'il n'y a qu'un seul hyperplan de 3e ordre, lequel constitue tout l'espace. Pour s'élever à la 4e dimension, il suffira d'admettre le postulat contraire :

« XIX'. *a*, *b*, *c*, *d* étant 4 points non situés dans un même plan, il existe un point hors de l'hyperplan *abcd*. »

1. « Es muss in der That, wenn anders die Geometrie wirklich deductiv sein soll, der Process des Folgerns überall unabhängig sein vom *Sinn* der geometrischen Begriffe, wie er unabhängig sein muss von den Figuren; nur die in den benutzten Sätzen, beziehungsweise Definitionen niedergelegten *Beziehungen* zwischen den geometrischen Begriffen dürfen in Betracht kommen. » (Pasch, *op. cit.*, p. 98.) Cette phrase souvent citée caractérise parfaitement la tendance logique de toute la Mathématique moderne.

Si l'on veut limiter à 4 le nombre des dimensions de l'espace, on devra admettre un postulat analogue à XIX, à savoir :

« XX'. *a*, *b*, *c*, *d*, *e* étant 5 points non situés dans un même hyperplan de 3ᵉ ordre, et *f* un point non situé dans aucun des hyperplans *abcd*, *abce*, *abde*, *acde*, *bcde*, la droite *af* rencontre l'hyperplan *bcde*. »

Il en résulte que la figure *abcde* (hyperplan de 4ᵉ ordre) constitue tout l'espace. On voit que l'on peut ainsi définir progressivement un espace à *n* dimensions (*n* étant un nombre entier fini), ou même (par induction complète) un espace à α_0 dimensions [1], au moyen du postulat suivant (généralisation des postulats XI et XIII) :

« XI'. *n* étant un nombre entier positif, si P est un hyperplan de *n*ᵉ ordre, il existe un point hors de P. »

S'il existe des points en dehors d'un hyperplan de *n*ᵉ ordre, et cela quel que soit *n*, le nombre des dimensions de l'espace est infini. C'est ce que M. Pieri appelle l'espace projectif absolu. Et comme le postulat XI' remplace les postulats XI et XIII, cela fait en tout 17 postulats pour définir l'espace projectif absolu, et 19 pour définir l'espace projectif à 3 dimensions : de sorte qu'on peut dire qu'au point de vue logique celui-ci est moins simple que celui-là. Cela montre combien il est facile, logiquement, de concevoir un espace d'un nombre quelconque de dimensions, même infini [2].

Pour achever l'analyse logique de la Géométrie projective, il reste à donner une définition logique de la droite projective, qui est, comme on l'expliquera tout à l'heure, l'unique notion indéfinissable de cette théorie. La droite projective est un ensemble de points (en nombre illimité) déterminé par deux points; on pourrait donc la définir comme une relation uniforme entre un couple de points et un ensemble de points (relation uniforme, mais non biuniforme : car la même droite

1. α_0 est le nombre cardinal des nombres entiers finis (v. p. 65).

2. M. Veronese a été le premier à concevoir un espace d'un nombre infini de dimensions (*Fundamenti di Geometria a più dimensioni*, Padova, 1891).

peut être déterminée par plusieurs couples de points). Mais cette relation très complexe (ayant 2 antécédents et un nombre infini de conséquents) peut se réduire à une relation symétrique et transitive entre *deux* points ; seulement cette relation n'a lieu qu'entre deux points *différents* (elle est, comme on dit, *aliorelative* [1]), et cette propriété limite sa transitivité. En d'autres termes, soit R cette relation ; aRb signifie que les points a et b appartiennent à une droite R (la relation R est la même pour tous les couples de points d'une droite, mais elle diffère d'une droite à l'autre). On aura toujours : $aRb = bRa$, et $aRb.\ bRc.\ \supset.\ aRc$ (si a et c sont différents). Une droite entière, c'est-à-dire le domaine de la relation R, se compose d'un de ses points et de tous les points qui ont avec lui la relation R (puisque cette relation est symétrique).

Une fois les droites projectives définies comme les domaines des relations du type susdit, on peut définir l'espace projectif comme un ensemble de relations de ce type, possédant en outre toutes les propriétés énoncées dans les postulats énumérés ci-devant. On aura ainsi une définition purement logique de l'espace projectif [2]. Elle n'implique aucune notion indéfinissable, puisque les droites sont définies comme des relations d'un certain type, et que les points sont conçus uniquement comme les termes (problématiques) de ces relations, de sorte que leur notion n'intervient pas réellement dans la théorie. Elle n'implique non plus aucune proposition première indémontrable, puisque tous les postulats de la Géométrie projective font maintenant partie de la définition de l'espace projectif [3], et constituent les propriétés hypothétiques de cet espace. On n'en affirme aucune catégoriquement ; on se borne à affirmer que, *si* un espace jouit de telles propriétés énoncées dans sa définition, il possédera en outre telles autres propriétés énoncées dans les théorèmes. Ainsi la Géométrie projective est

1. Nous préférerions un mot comme *antiréflexive*.
2. Elle se trouve tout au long dans RUSSELL, *op. cit.*, § 413.
3. Ou plutôt : de tous les espaces projectifs, car toute définition a pour objet une classe, qui peut, jusqu'à preuve du contraire, contenir une infinité d'individus.

ramenée à la forme d'une vaste *implication*, et par suite doit rentrer dans la Mathématique *pure*, qui ne connaît pas d'autres principes que ceux de la Logique.

C. — Géométrie descriptive.

La Géométrie descriptive a pour notions premières le *point* et le *segment* rectiligne [1]. Elle diffère donc de la Géométrie projective en ce qu'elle prend pour base, non plus la droite infinie, mais la portion finie de droite comprise entre deux points. Sans doute, on a pu définir en Géométrie projective le segment, mais au moyen de trois points, parce que la droite projective est une ligne fermée. Au contraire, en Géométrie descriptive, le segment sera déterminé par deux points seulement (ses extrémités). Par suite, il y aura une relation d'*entre* entre trois points quelconques de la droite; tandis qu'en Géométrie projective on ne peut pas dire qu'un point soit entre deux autres, et l'on ne peut définir l'ordre des points d'une droite qu'au moyen d'une relation entre *quatre* points (relation harmonique, ou relation de *séparation*) [2].

La notion de *segment* équivaut à la relation *entre*; au lieu de dire : « c est un point du segment ab », on peut dire : « c est entre a et b (sur la droite ab) ». D'une manière comme de l'autre, le segment défini par deux points (compris entre deux points) a et b sera un ensemble de points; on le représentera par ab, et l'on écrira : « $c \varepsilon ab$ » pour traduire l'une ou l'autre des assertions susdites.

1. Il n'est pas besoin de faire remarquer que la théorie en question n'a rien de commun avec ce qu'on appelle dans les classes Géométrie descriptive, c'est-à-dire avec la méthode graphique qui consiste à représenter les figures de l'espace par leurs projections sur deux plans.

2. La Géométrie descriptive a été inaugurée par Pasch, *Vorlesungen über neuere Geometrie*, §§ 1-12 (1882); puis formulée en symboles par Peano : *I principii di Geometria logicamente esposti* (Turin, 1889), et *Sui fondamenti della Geometria*, ap. *Rivista di Matematica*, t. IV, p. 51-90 (1894). Ce sont ces deux mémoires que nous allons résumer. Des systèmes d'axiomes analogues se trouvent dans Ingrami, *Elementi di Geometria* (1899), et F. Schur, *Ueber die Grundlagen der Geometrie*, ap. *Mathematische Annalen*, t. LV, p. 265-292 (1902).

Voici maintenant les postulats qui suffisent à fonder logiquement la Géométrie descriptive :

« I. Il y a (au moins) un point. »

« II. Étant donné un point a, il y a un point x différent de a. »

« III. Entre deux points coïncidants (identiques) il n'y a aucun point » ; autrement dit, le segment aa est nul (est une classe vide).

« IV. Entre deux points distincts il y a un point [1]. » Ce postulat est la réciproque du précédent : un segment n'est nul que si ses deux extrémités coïncident.

« V. Le segment ab est contenu dans le segment ba », c'est-à-dire que tout point qui appartient à ab appartient à ba. Il s'ensuit immédiatement que les segments ab et ba coïncident (sont identiques). Le segment est donc symétrique ; il n'est pas *dirigé* (comme le vecteur).

« VI. Le point a n'est pas entre a et b » ; il en est de même du point b, en vertu de la commutativité des extrémités, qui résulte du postulat V. En d'autres termes, les extrémités d'un segment n'en font pas partie. C'est là une sorte de convention, conforme aux postulats III et IV et au sens ordinaire de la relation *entre* [2].

Pour pouvoir sortir du segment fini, et s'élever à la notion de la droite entière, il convient de définir le *prolongement* d'un segment au delà d'une de ses extrémités. Soit ab un segment, on désignera par $a'b$ son prolongement au delà de b, et par ab' son prolongement au delà de a, l'un et l'autre étant indéfinis. Il est très remarquable qu'on puisse les définir au moyen de la notion de segment fini, ou de la relation *entre*, comme suit : « $a'b$ est l'ensemble des points x tels que b est entre a et x. » De même, ab' sera l'ensemble des points x tels que a est entre b et x.

1. Encore ici, nous ferons remarquer la portée de ces postulats existentiels I, II, IV, qui permettront ensuite d'affirmer l'existence d'un point déterminé par telles ou telles conditions.

2. Si l'on voulait que le segment contînt ses extrémités, il faudrait modifier comme suit les postulats III et IV : « Un segment dont les extrémités coïncident se réduit à un seul point. » — « Un segment dont les extrémités sont distinctes contient un point différent de ses deux extrémités. »

En somme, il y a équivalence entre les 3 propositions : « c appartient à ab; b appartient à $a'c$; a appartient à $b'c$ », de sorte qu'on peut « résoudre » la relation d'*entre* par rapport à chacun des 3 points qui en sont les termes.

Il ne suffit pas de définir les prolongements d'un segment, il faut affirmer qu'ils existent; d'où le postulat suivant :

« VII. a et b étant 2 points distincts, il y a des points qui appartiennent à $a'b$ » (la classe $a'b$ n'est pas nulle). Il en est de même de ab', en vertu de la commutativité des extrémités. De même, d'ailleurs, que $ab = ba$, on a aussi les équivalences de notation :

$$a'b = ba', \qquad ab' = b'a.$$

Les prolongements d'un segment ne sont pas des segments : on les appellera des *rayons* (demi-droites indéfinies). Ces rayons ont pour origine le point marqué par la lettre non accentuée.

Pour démontrer les propriétés des segments relatives à leur composition et à leur décomposition, il faut admettre les deux postulats suivants :

« VIII. Si c est un point du segment ab, et si d est un point du segment ac, d est aussi un point du segment ab »; d'où il résulte aussitôt que le segment ab contient le segment ac, le segment bc et le segment cd; et que, semblablement, le rayon $a'c$ est contenu dans le rayon $a'b$. On en déduit encore qu'il est impossible que b soit entre a et c et c entre a et b; d'où il résulte que ab, $a'b$ et ab' n'ont aucun point commun.

« IX. Si c et d appartiennent au segment ab, ou bien ils coïncident, ou bien d est entre a et c, ou bien d est entre c et b. »

De ce postulat on déduit que le segment ab est la somme logique des segments ac, cb et du point c; que, si c est entre a et b et d entre c et b, c est entre a et d; que, si c est entre a et b, d entre a et c, et e entre c et b, c est entre d et e; que, dans le même cas, les segments ac et cb n'ont aucun point commun; enfin, que si c et d appartiennent à ab, le segment cd est contenu dans le segment ab[1].

1. Il ne faut pas confondre cette proposition avec celle-ci, que nous

Pour établir les propriétés des prolongements des segments, c'est-à-dire des rayons, il faut encore admettre deux autres postulats :

« X. Si c et d appartiennent au rayon $a'b$, ou bien ils coïncident, ou bien d est entre b et c, ou bien c est entre b et d. » Ce postulat est, pour le prolongement ba', l'analogue du postulat IX pour le segment ab. On en déduit que le rayon ba' est la somme logique du segment bc, du point c et du rayon ca'; et que, dans la même hypothèse, le segment cd est contenu dans le rayon ba'.

« XI. Si b est entre a et c, et c entre b et d, c est entre a et d. »

Ce postulat permet de démontrer que, si b appartient au segment ac ou à son prolongement ac', les rayons ca' et cb' coïncident (sont identiques)[1].

On peut alors définir la *droite* (entière) ab comme la somme logique des points a et b, du segment ab et de ses prolongements ab' et ba'. On démontre que la droite ba est identique à la droite ab; que, si c est un point de la droite ab différent de a, la droite ab est identique à la droite ac; enfin, que si c et d sont deux points distincts de la droite ab, celle-ci est identique à la droite cd. Ainsi une droite est déterminée par deux quelconques de ses points.

Les postulats précédents suffisent à fonder la Géométrie descriptive de la droite. Avant d'aller plus loin, il convient de définir, toujours au moyen de l'idée de segment, des notions dont nous aurons besoin dans la suite.

Soit k une figure quelconque, c'est-à-dire un ensemble de points, et a un point. Par ak on désignera l'ensemble des points situés sur l'un quelconque des segments ax qui joignent le point a à tous les points x de k. Cette figure s'appellera la *jonction* de a et de k. Par $a'k$ ou ka' on désignera l'ensemble

avons citée comme conséquence du postulat VIII : « Si c est entre a et b, et d entre a et c, le segment cd est contenu dans le segment ab. »

1. Les deux postulats X et XI pourraient être remplacés par la proposition suivante : « Si les 2 segments ab, cd ont 2 points distincts communs, les 4 points a, b, c, d appartiennent à un même segment. » (PEANO, *Principii di Geometria*, p. 38.)

des points situés sur un rayon $a'x$ quelconque, où x est un point de k, c'est-à-dire l'ensemble des points qui déterminent avec a des segments passant par un point quelconque de k. Cette figure s'appellera la *projection* de k à partir du point a, ou, suivant l'expression imagée de M. PEANO, l'*ombre* de k éclairée par a. Enfin, par ak' ou $k'a$ on désignera l'ensemble des points situés sur le prolongement au delà de a des segments qui joignent a à un point quelconque de k.

De même, h et k étant deux figures quelconques, hk désignera l'ensemble des points situés sur les segments qui joignent chaque point de h à chaque point de k; $h'k$ désignera l'ensemble des points situés sur les prolongements de ces segments au delà du point de k, et hk' désignera l'ensemble des points situés sur les prolongements de ces segments au delà du point de h.

Les notations ab, $a'b$ rentrent comme cas particuliers dans celles-ci : le segment ab est la *jonction* des points a et b; le rayon $a'b$ est l'ombre de b éclairé par a. La figure $a'(ab)$ est la projection de ab à partir de a, c'est-à-dire le rayon qui a pour origine a et qui contient b; c'est donc la demi-droite complémentaire de la demi-droite ab'. La droite ab se compose de ab', du point a et de $a'(ab)$ [1], et la demi-droite $a'(ab)$ se compose de ab, du point b et de ba'.

Si h et k sont deux classes de points, on a, indépendamment de tout postulat géométrique, et en vertu des seules lois logiques :

$$a\,(h \cup k) = ah \cup ak$$
$$a'\,(h \cup k) = a'h \cup a'k$$

Et si $h \supset k$, on a, dans les mêmes conditions :

$$ah \supset ak, \qquad a'h \supset a'k,$$

c'est-à-dire que, si l'ensemble h fait partie de l'ensemble k, sa jonction ou sa projection est contenue dans la jonction ou la projection de k (par rapport au même point).

1. Le rayon $a'(ab)$ peut aussi s'exprimer par $a(a'b)$ ou $a(ba')$.

Cela posé, on sort de la droite par le postulat :

« XII. r étant une droite quelconque, il existe au moins un point hors de r. »

Pour pouvoir définir le plan, on a besoin en outre du postulat suivant :

« XIII. a, b, c étant des points non collinéaires, si d est entre b et c, et e entre a et d, le prolongement de be rencontre ac » (fig. 10), c'est-à-dire qu'il existe un point f tel que f est entre a et c, et e entre b et f.

De ce postulat on déduit que : $a(bc)$ ɔ $b(ac)$, d'où, réciproquement : $b(ac)$ ɔ $a(bc)$, et par conséquent : $a(bc) = b(ac)$. Ainsi la

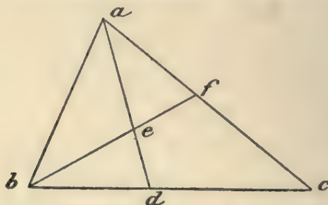


Fig. 10.

jonction de a et bc coïncide avec la jonction de b et ac (et par suite avec la jonction de c et ab). Cette figure unique s'appellera le *triangle abc*. En outre, si d est un point quelconque du segment bc, et f un point quelconque du segment ac, le segment df est contenu dans le triangle abc. Dans la même hypothèse (a, b, c non collinéaires), si p est un point du triangle abc, celui-ci se compose du point p, des 3 segments pa, pb, pc, et des 3 triangles pab, pbc, pca. Si p et q sont 2 points distincts du triangle abc, le rayon $p'q$ rencontre le contour du triangle ; le rayon pq' également, de sorte que la droite pq rencontre le contour du triangle en 2 points situés respectivement sur les 2 prolongements du segment pq.

Cela posé, on peut définir le plan abc comme l'ensemble des 3 points a, b, c, des 3 segments ab, bc, ca, de leurs 6 prolongements ab' et ba', bc' et cb', ca' et ac', du triangle abc, des

1. La figure $a'bc$ est la projection de bc depuis a, c'est-à-dire la partie du plan comprise entre le segment bc et les rayons ba' et ca'.

3 figures $a'bc$, $b'ca$, $c'ab$ [1], et des 3 angles $a'b'c$, $b'c'a$, $c'a'b$ [2]. On voit que la définition descriptive du plan est bien moins simple et moins unitaire que la définition projective.

En revanche, on a une définition très simple du demi-plan, qui n'est, pas plus que la demi-droite, une notion projective. Soit r une droite, et a un point extérieur à r; la figure $a'r$ sera, dans le plan déterminé par a et r, le demi-plan qui ne contient pas a. L'autre demi-plan, qui contient a, sera $r'ra$ (projection de ra depuis r). Ces expressions sont analogues aux expressions des demi-droites ab' et $a'ab$ (séparées par le point a).

Enfin on démontre que, si d est un point quelconque du plan abc, ou bien il est sur l'une des droites ab, bc, ca, ou bien il est dans le triangle abc, ou a est dans le triangle bcd, ou b est dans le triangle acd, ou c est dans le triangle abd; ou bien enfin ad et bc se coupent, ou ac et bd, ou ab et cd. La réciproque est vraie, c'est-à-dire que si l'une de ces alternatives a lieu, le point d est dans le plan abc.

Pour établir l'unicité du plan déterminé par 3 points, on a besoin d'un nouveau postulat :

« XIV. a, b, c étant 3 points non collinéaires, si d est entre b et c, et f entre a et c, les segments ad et bf se coupent (ont un point commun e) » (fig. 10).

On remarquera combien ce postulat diffère peu du précédent, et pourtant il a une portée déductive toute différente. On en déduit d'abord que, si l'on prend 2 points, l'un sur $a'b$, l'autre sur $a'c$, le segment qui les joint est contenu dans $a'bc$; que, si l'on prend 2 points, l'un sur $b'a$, l'autre sur $c'a$, le segment qui les joint est contenu dans l'angle $b'c'a$. On démontre ensuite que le plan abc coïncide avec le plan abd, si d est un point du segment bc, ou de la droite bc (autre que b), ou même du triangle abc; enfin, que, si d, e, f sont 3 points non collinéaires du plan abc, celui-ci coïncide avec le plan def.

1. La figure $a'bc$ est la projection de bc depuis a, c'est-à-dire la partie du plan comprise entre le segment bc et les rayons ba' et ca'.

2. La figure $a'b'c$ est en effet la projection de $b'c$ depuis a (ou de $a'c$ depuis b), c'est-à-dire l'angle compris entre les deux rayons ca', cb'.

On démontre aussi que deux plans qui ont 3 points communs coïncident (sont identiques), et que la droite déterminée par deux points d'un plan est contenue dans ce plan. Ainsi se trouvent établies les propriétés essentielles du plan, qui lui servent couramment de définition.

Les postulats précédents (joints au postulat de continuité) suffisent à la Géométrie plane. Pour passer à la Géométrie « solide », il faut sortir du plan et admettre le postulat suivant :

« XV. Étant donné un plan quelconque, il existe au moins un point hors de ce plan. »

On appellera *complanaires* les points situés dans un même plan. Si a, b, c, d sont 4 points non complanaires, les figures $a(bcd)$ et $b(acd)$ coïncident; elles coïncident aussi avec $c(abd)$ et $d(abc)$. Cette figure unique s'appelle le *tétraèdre abcd* [1]. Soit e un point de ce tétraèdre, celui-ci se compose du point e, des 4 segments ea, eb, ec, ed, des 6 triangles eab, eac, ebc,... et des 4 tétraèdres $eabc$, $eabd$, $eacd$, $ebcd$. On démontre que chacun des prolongements d'un segment contenu dans le tétraèdre rencontre sa surface (c'est-à-dire une de ses 4 faces abc, abd...) et que, si e est un point de la face bcd et f un point de l'arête ad, le segment ae rencontre le triangle bcf. On établit encore le théorème suivant : « Étant données deux droites dans un plan et un point hors de ce plan, les deux plans qui joignent ce point respectivement à ces deux droites ont une droite commune ». Ce théorème a pour conséquence le théorème des triangles homologiques dans l'espace, et par suite dans le plan. On voit que ce théorème dépend du postulat XV, qui implique la troisième dimension de l'espace [2].

Pour prouver que, si deux plans ont un point commun,

1. Un tétraèdre peut encore être considéré comme la figure $(ab)(cd)$, ou $(ac)(bd)$, ou $(ad)(bc)$.

2. Pour prouver que ce théorème dépend du postulat XV, M. Peano montre que, si l'on substitue au plan une surface quelconque, et aux droites les géodésiques de cette surface, les 14 premiers postulats pourront être vérifiés par les points de cette surface sans que le théorème de Desargues soit vérifié. Il est toutefois vérifié sur les surfaces à courbure constante (*Revue de Mathématiques*, t. IV, p. 73).

ils ont une droite commune, il faut limiter à 3 le nombre des dimensions. C'est ce qui résulte du postulat suivant :

« XVI. Étant donnés un plan p et un point a hors de ce plan, on prend un point b sur le prolongement d'un des segments qui joignent a au plan p; alors, si x est un point quelconque, ou bien il appartient au plan p, ou bien le segment ax rencontre le plan p, ou bien le segment bx rencontre le plan p. »

Ce postulat signifie, en somme, que le plan partage l'espace en deux régions qu'il sépare, de sorte qu'on peut parler des deux *côtés* du plan. Deux points a, b sont de côtés opposés du plan, si le segment ab le rencontre (le *perce*, comme on dit); ils sont du même côté, si le segment ab ne le rencontre pas. Étant donnés 3 points a, b, c hors du plan, si deux d'entre eux sont de côtés opposés, le troisième sera du même côté que l'un des deux premiers. Cela revient à dire que le plan p coupe deux des côtés du triangle abc, mais non le troisième. Il en résulte qu'une droite quelconque du plan abc coupe deux des côtés du triangle abc, et deux seulement, ou n'en coupe aucun [1].

Les considérations précédentes amènent à concevoir le *demi-espace*, c'est-à-dire l'ensemble des points situés du même côté d'un plan. Soit p un plan et a un point hors de ce plan; la figure $a'p$ sera la projection du plan p depuis le point a, c'est-à-dire le demi-espace qui ne contient pas a. Le demi-espace qui contient a (complémentaire du précédent) sera représenté par $p'pa$, projection de la figure pa à partir du plan p.

Pour compléter les principes de la Géométrie descriptive, on n'a plus qu'à énoncer le *postulat de continuité* :

« XVII. Soit k une classe de points contenus dans le segment ab; il existe un point x du segment ab (ou coïncidant avec b) tel qu'aucun point de k n'est entre x et b, et que, pour tout point y pris entre a et x, il existe des points de k situés entre y et b. » En d'autres termes, si l'on emploie les expressions d'*avant* et d'*après* (qui supposent un ordre entre les points de ab,

1. Proposition admise comme postulat par Pasch (*op. cit.*, § 2, Principe IV), et par Hilbert (*Grundlagen der Geometrie*, Axiome II, 5).

de a à b), le point x est tel que tous les points de k sont avant lui, mais qu'il y a des points de k après tout point y situé avant x. Le point x est pour ainsi dire la *limite postérieure* de l'ensemble k. Il va sans dire que, en vertu du même postulat, il existe aussi une *limite antérieure* du même ensemble.

Suivant une remarque de M. PEANO lui-même [1], on aurait pu prendre pour notion première, au lieu du segment (fini), le rayon (infini), et définir le segment au moyen du rayon : en effet, le segment ab est la partie commune aux deux rayons que nous avons appelés $a'ab$ et $b'ba$. Cette remarque enlève toute portée aux considérations empiristes par lesquelles M. PASCH croit devoir justifier le choix de ses notions premières, le segment fini et la portion de plan finie [2], sous prétexte que nous ne percevons jamais que des portions finies des droites et des plans que nous offre l'expérience [3].

Depuis que ce chapitre est composé, M. Oswald VEBLEN a publié un nouveau système d'axiomes pour la Géométrie, qui constitue, semble-t-il, une simplification et un perfectionnement de la Géométrie descriptive [4]. Pour le dire en passant, ce simple fait prouve combien ces recherches de Logique mathématique, ignorées ou dédaignées des mathématiciens français, sont en faveur dans les autres pays [5]. Nous croyons donc devoir donner à nos lecteurs un bref aperçu de ce travail.

1. *I Principii di Geometria*, p. 25.
2. *Vorlesungen über neuere Geometrie*, Introduction.
3. Quant aux considérations empiristes sur le minimum perceptible de longueur, au-dessous duquel les points seraient confondus, et sur l'inexactitude inévitable des mesures expérimentales, il suffit de remarquer qu'elles tendent, non à fonder, mais à infirmer les notions de divisibilité à l'infini et de continuité, que M. PASCH admet pourtant (*op. cit.*, §§ 1 et 23).
4. *A System of Axioms for Geometry*, by Oswald VEBLEN, ap. *Transactions of the American Mathematical Society*, t. V, p. 343-384 (juillet 1904).
5. Citons encore plusieurs nouveaux mémoires de Logique mathématique qui viennent de paraître : E.-V. HUNTINGTON, *A set of postulates for real Algebra, comprising postulates for a one-dimensional continuum and for the theory of groups*, ap. *Transactions of the American Mathematical Society*, t. VI, p. 17-41; *Note on the definitions of obstract groups and fields by sets of independent postulates*, ibid., p. 181-193; *A set of postulates for ordinary complex Algebra*, ibid., p. 209-229; O. VEBLEN, *Theory on plane curves in non-metrical Analysis situs*, ibid., p. 83-98 (1905).

Les notions premières (indéfinissables) de ce système sont le concept (classe) de *point*, et la relation d'*ordre* entre 3 points. Pour le dire tout de suite, la relation d'*ordre* entre 3 points équivaut à ce que nous avons appelé précédemment la relation d'*entre*; comme celle-ci, elle implique que les trois points en relation sont en ligne droite.

Les axiomes sont au nombre de 12 seulement, et ils sont indépendants les uns des autres, comme M. Veblen le prouve par des exemples. En outre, ils forment un système *catégorique*, c'est-à-dire qu'il n'y a qu'un ensemble qui les vérifie, ou que, si deux ensembles les vérifient, ils sont susceptibles d'une correspondance univoque et réciproque. Aux systèmes catégoriques s'opposent les systèmes *disjonctifs* [1], auxquels on peut adjoindre un ou plusieurs axiomes *indépendants* des premiers, de manière à restreindre leur extension. Quoi qu'on pense du choix de ces mots, il y a là une distinction utile et importante, que la Logique classique ignorait, et dont la Logique moderne sera encore redevable à des mathématiciens.

Les 12 axiomes de M. Veblen se partagent en deux groupes. Le premier groupe, qui comprend 8 axiomes, est relatif aux propriétés de la ligne droite :

I. « Il existe au moins deux points distincts. »

II. « Si les points A, B, C sont dans l'ordre ABC, ils sont aussi dans l'ordre CBA. »

Ainsi la relation d'ordre est symétrique ou réversible.

III. « Si les points A, B, C sont dans l'ordre ABC, ils ne sont pas dans l'ordre BCA. »

1. L'auteur emprunte les expressions *catégorique* et *disjonctif* à M. J. Dewey; elles nous paraissent peu claires et peu heureuses, à raison du sens tout différent qu'elles ont en Logique classique. M. Huntington emploie, au lieu de *catégorique*, le mot *suffisant* (sous-entendu : pour déterminer un ensemble qui vérifie le système), qui est meilleur. M. Hilbert emploie dans ce sens le mot *complet*, que M. Huntington emploie pour qualifier un système consistant, suffisant et irréductible. Il nous semble qu'il serait préférable, et plus simple, d'employer les termes traditionnels *singulier* et *général*, qui indiquent clairement que l'extension du système comprend respectivement *un* ou plusieurs individus. Après tout, un système d'axiomes peut être considéré comme un concept; c'est même un concept, au sens de M. Frege, car c'est une fonction propositionnelle à une variable.

Ainsi la relation d'ordre n'est pas circulaire, mais linéaire (ouverte). Par cet axiome, la Géométrie descriptive se sépare de la Géométrie projective, où la droite est une ligne fermée; et l'on peut prévoir que le point à l'infini en sera exclu.

IV. « Si les points A, B, C sont dans l'ordre ABC, les points A et C sont distincts. »

V. « Si A et B sont deux points distincts, il existe un point C tel que l'on a l'ordre ABC. »

Cet axiome implique que la droite est prolongeable, ou plutôt prolongée, au delà de chacun de ses points. On peut alors définir la *droite* comme suit : étant donnés deux points *distincts* A, B, la droite AB est l'ensemble des points A, B et des points X qui vérifient un des trois ordres ABX, AXB, XAB. Le *segment* AB est l'ensemble des points X qui vérifient l'ordre AXB. On démontre que deux points distincts déterminent une droite unique et un segment unique.

VI. « Si deux points distincts C et D appartiennent à la droite AB, le point A appartient à la droite CD. »

De cet axiome on déduit que deux points distincts déterminent une droite.

VII. « S'il existe trois points distincts, il existe trois points A, B, C qui ne sont pas en ligne droite » (c'est-à-dire qui ne vérifient aucun des ordres ABC, BCA, CAB).

Cet axiome existentiel permet de sortir de la droite et d'obtenir la notion de *triangle*.

VIII. *Axiome de la transversale* : « Si trois points A, B, C ne sont pas en ligne droite, et si D et E sont deux points qui vérifient les ordres BCD et CEA, il existe un point F, dans l'ordre AFB, qui est en ligne droite avec D et E » (fig. 11). On prouve que les points D, E, F sont distincts, et sont dans l'ordre DEF; on prouve aussi qu'aucune droite ne peut rencontrer les trois segments qui forment les côtés d'un triangle. Grâce à l'axiome précédent, on peut démontrer qu'entre deux points distincts il y en a un troisième (en ligne droite avec eux), et par suite qu'il y a une infinité de points dans un segment et sur une droite. C'est la première fois qu'on peut affirmer qu'il existe

une infinité de points, et cette proposition est une conséquence des *huit* axiomes précédents. Au contraire, *sept* quelconques de ces axiomes peuvent être vérifiés par un ensemble *fini* sans que le huitième le soit, et c'est ainsi que M. VEBLEN prouve l'indépendance absolue de ces huit premiers axiomes. On peut également définir l'ordre général des points sur une droite, et assigner à un ensemble fini de points d'une droite

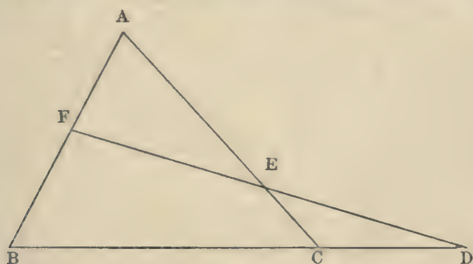


Fig. 11.

des numéros tels que l'ordre des points soit le même que celui de leurs numéros.

Enfin, de l'axiome VIII on déduit ce théorème, dont l'énoncé implique ce même axiome : Si une droite rencontre un côté d'un triangle et le prolongement d'un autre côté, elle rencontre le troisième côté.

On peut définir le *plan* comme suit : Si A, B, C sont trois points non en ligne droite, le plan ABC est l'ensemble des points qui sont en ligne droite avec deux points des côtés du triangle ABC. On démontre que trois points non en ligne droite déterminent un plan ; et qu'une droite qui a deux points communs avec un plan y est contenue tout entière.

Pour sortir du plan et construire l'espace, on a besoin de l'axiome suivant :

IX. *Axiome de l'espace* : « S'il existe trois points non en ligne droite, il existe *un* plan tel qu'il y a un point non situé dans ce plan ». D'où l'on déduit aussitôt que, étant donné un plan *quelconque*, il existe un point en dehors de ce plan[1].

1. La différence entre cette proposition et l'axiome IX consiste dans

On peut alors définir le *tétraèdre* déterminé par 4 points non situés dans un même plan, puis l'*espace* (à 3 dimensions), comme l'ensemble des points qui sont en ligne droite avec deux points des faces du tétraèdre. On démontre que 4 points déterminent un seul espace, et que, si une droite a 2 points, ou un plan 3 points communs avec un espace, ils y sont contenus tout entiers.

On pourrait de même sortir de l'espace à trois dimensions; pour s'y enfermer, on a besoin de l'axiome suivant :

X. *Axiome des dimensions* : « S'il existe 4 points non situés dans un même plan, il existe un espace tel qu'il n'y a aucun point qui ne soit en ligne droite avec deux points de cet espace. » D'où il résulte qu'il n'y a qu'un espace (à 3 dimensions), et que deux plans quelconques ont une droite commune.

L'auteur généralise ensuite la notion d'ordre, définit les *régions* de la droite, du plan et de l'espace (demi-droites, demi-plans; intérieur d'un angle, d'un triangle, d'un polygone, d'un dièdre, d'un trièdre, etc.) et démontre leurs propriétés essentielles, par exemple : qu'un polygone plan partage son plan en deux régions séparées [1].

Il formule l'*axiome de continuité* sous une forme assez compliquée et fort peu évidente [2] :

XI. « S'il existe une infinité de points, il existe un certain couple de points A, C jouissant de la propriété suivante : si $[\sigma]$ est une classe infinie de segments de la droite AC telle que tout point du segment AC (y compris A et C) est un point d'un segment σ, il existe une sous-classe finie σ_1, σ_2, ... σ_n qui a la même propriété. » On démontre d'abord que cette propriété appartient à un segment quelconque [3]; puis, que, si un segment AB se compose de deux classes de points [X] et [Y]

la distinction de *un* (*a*) et de *un quelconque* (*any*). On voit l'importance logique de ces distinctions grammaticales, que M. Russell a soumises à une pénétrante analyse (*The Principles of Mathematics*, ch. v).

1. Cf. p. 141.

2. C'est ce que M. Schönflies appelle le *théorème de Heine-Borel : Bericht über die Mengenlehre*, ap. *Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung*, t. VIII, p. 51 (1900).

3. Même remarque que pour l'axiome IX.

telles qu'aucun point X n'est entre deux Y ni aucun point Y entre deux X, il existe un point O, et un seul, qui est entre chaque X et chaque Y.

On reconnaît dans cette proposition l'axiome de la continuité de M. DEDEKIND, sous la forme que lui a donnée M. PIERI. De l'axiome de continuité joint aux 8 premiers on déduit que, par un point pris hors d'une droite, il passe *au moins* une droite qui ne la rencontre pas (cela résulte notamment de ce fait, conséquence de l'axiome III, que l'ordre des points d'une droite n'est pas circulaire), et que, s'il y a plusieurs droites telles, il y a deux demi-droites qui séparent celles qui rencontrent la première droite de celles qui ne la rencontrent pas (ce sont les *parallèles* au sens de Lobatchevsky). On voit que la géométrie de Riemann est exclue d'avance par l'axiome III. Pour exclure la géométrie de Lobatchevsky, il suffit d'admettre l'*axiome des parallèles* :

XII. « Soit a une droite d'un plan α, il y a dans ce plan un point C tel qu'il ne passe par C qu'une seule droite du plan α qui ne rencontre pas la droite a. »

Il suffit de postuler ce fait pour une seule droite et un seul point : car on peut alors démontrer qu'il a lieu pour n'importe quelle droite et n'importe quel point[1]. Cette dernière proposition est le postulatum d'Euclide.

L'auteur indique ensuite comment on peut édifier la Géométrie projective sur les fondements précédents, en définissant et introduisant les éléments impropres ou idéaux (points, droites, plans projectifs) suivant la méthode que nous exposerons plus loin (p. 177). Enfin il montre comment on peut établir, avec le même système de principes, la Géométrie métrique euclidienne, sans nouveaux *axiomes*, et simplement en donnant une *définition* projective de la congruence. On définit d'abord la congruence des angles (et par suite la similitude) en remarquant que, en vertu de l'axiome des parallèles, les points impropres de l'espace forment un plan (le plan de l'infini), et

1. Même remarque que pour les axiomes IX et XI.

en définissant la perpendicularité d'une droite et d'un plan au moyen du cercle imaginaire de l'infini. On définit ensuite la congruence des segments (et par suite la congruence de toutes les figures) au moyen des *réflexions*, c'est-à-dire de certaines transformations projectives qui laissent invariant le cercle de l'infini. Cela fait, on peut définir la longueur des segments et introduire dans l'espace un système de coordonnées.

En résumé, ce sont les trois formes de Géométrie que M. O. Veblen fonde sur douze axiomes seulement. Sans doute, la réduction du nombre des axiomes n'est pas à elle seule une simplification, car on peut, comme l'a remarqué M. Pieri [1], fondre à volonté plusieurs axiomes en un seul. Néanmoins, ce système nous paraît offrir plus de simplicité et de clarté que les autres (sauf en ce qui concerne l'axiome de continuité), et il a l'avantage d'être complet et irréductible.

La théorie précédente repose sur la relation d'*entre* existant entre trois points. Or nous avons vu [2] que cette relation ternaire peut se ramener à une relation binaire asymétrique et transitive. Par suite, cette théorie est susceptible d'une simplification qu'a suggérée M. Vailati [3]. Soit une relation S (qu'on lira : *suit*); on suppose qu'elle est *asymétrique*, c'est-à-dire que aSb et bSa s'excluent; qu'elle est *transitive*, c'est-à-dire que aSb et bSc entraînent aSc; et qu'entre deux termes distincts a, b on a toujours, soit aSb, soit bSa. Ce sont là les trois postulats de la nouvelle théorie. On définira la relation d'*entre* comme suit :

$$b \varepsilon ac = (aSb . bSc) \cup (cSb . bSa) \qquad \text{Df}$$

« b est entre a et c signifie, ou bien que a suit b et b suit c, ou bien que c suit b et b suit a. »

Par cette définition, la relation ternaire indéfinissable *entre*

1. *I Principii della Geometria di Posizione*, p. 3, note 7 (1898); *Bibliothèque du 1er Congrès international de Philosophie*, t. III, p. 393 (1901).
2. Chap. III, § A, p. 73.
3. *Sui principi fondamentali della Geometria della retta*, ap. *Rivista di Matematica*, t. II, p. 71-75 (1892).

est ramenée à la relation binaire indéfinissable S. Cela posé, on peut, au moyen des trois postulats qui caractérisent la relation S, démontrer les postulats III, V, VI, VIII, IX, X et XI de la théorie de M. PEANO, c'est-à-dire tous les postulats de la Géométrie de la droite, sauf les postulats *existentiels* I, II, IV et VII. Par exemple, le postulat III : « Le segment aa est nul » résulte immédiatement du fait que la relation S est asymétrique; car dire d'un point x qu'il appartient au segment aa, c'est affirmer à la fois : $aSx.\ xSa$, ce qui est impossible. De même, du fait que la relation S ne peut pas être réflexive se déduit le postulat VI : « le point a n'appartient pas au segment ab », car on a :

$$a \varepsilon ab . = (aSa.\ aSb) \smile (bSa.\ aSa)$$

et le second membre est absurde, car il contient le facteur absurde aSa. De ce que la définition de $b \varepsilon ac$ est symétrique par rapport à a et c, il résulte que $b \varepsilon ac = b \varepsilon ca$, ce qui est le postulat V. Les autres postulats se démontrent de même par des déductions purement logiques.

On peut, avec M. RUSSELL, faire un pas de plus dans la voie de la réduction logique et de la simplification. On peut concevoir la droite elle-même comme une relation asymétrique transitive qui existe entre deux quelconques de ses points, et par suite l'ensemble des droites de l'espace comme une classe de relations dont le champ est l'ensemble des points de l'espace. On posera les axiomes suivants [1] :

I. Il y a une classe de relations K, dont le champ est la classe *point*;

II. Il y a au moins un point;

R étant une relation de la classe K,

III. R n'est jamais réflexive;

IV. ${}^{c}R$ est une relation de la classe K;

V. $R^2 = R$;

VI. Le domaine de ${}^{c}R$ est contenu dans celui de R;

VII. Entre 2 points il y a une relation K et une seule;

1. RUSSELL, *op. cit.*, § 376.

VIII. *a* et *b* étant des points du domaine de *R*, on a, ou bien *aRb*, ou bien *bRa*.

On va voir que ces huit axiomes suffisent à fonder toute la théorie, et notamment à démontrer les postulats de M. Vailati. D'abord, des quatre premiers axiomes il résulte qu'il existe au moins deux points *a*, *b*. Soit *R* la relation qui existe entre ces deux points (en vertu de VII); on a : *aRb*, et on ne peut pas avoir : *bRa*, car la relation *R* étant transitive (V) serait alors réflexive (contrairement à III). Donc *R* et ${}^{c}R$ sont asymétriques. En vertu de V, non seulement la relation *R* est transitive (R^2ɔR), mais elle donne lieu à une série compacte (RɔR^2), car *aRb* implique qu'il y a un terme *c* tel que *aRc*. *cRb*; autrement dit, il y a toujours un terme entre deux termes de la relation. En vertu de VI, si *aRb*, il existe un point *c* tel que *bRc*; cela signifie que le segment *ab* a un prolongement au delà de *b* (et de même au delà de *a*), c'est-à-dire que la suite des points d'une droite n'a ni premier ni dernier terme (la droite est infinie dans les deux sens). Ainsi se trouvent démontrés les 3 postulats de M. Vailati et les postulats existentiels de M. Peano.

La Géométrie descriptive ressemble beaucoup, à première vue, à la Géométrie projective : d'abord, elle aboutit aux mêmes propositions concernant les relations des points, des droites et des plans; ensuite, elles s'opposent toutes deux à la Géométrie métrique par le fait qu'elles ne considèrent ni grandeur, ni distance, ni congruence, ni mouvement; l'une et l'autre sont des *Géométries de position*, et ont été longtemps confondues sous ce nom. Mais, d'autre part, elles diffèrent profondément l'une de l'autre, d'abord par leurs principes, et ensuite par leurs conséquences : en Géométrie projective, deux droites d'un plan se rencontrent toujours, ainsi qu'une droite et un plan, ou deux plans; en Géométrie descriptive, ces rencontres n'ont pas nécessairement lieu. En Géométrie descriptive, deux points suffisent à déterminer un segment, et trois points à déterminer un triangle; en Géométrie projective, deux points

déterminent deux segments, et trois points déterminent quatre triangles, de sorte qu'il faut leur adjoindre un nouveau point pour obtenir une détermination univoque. Toutes ces discordances proviennent de ce fait fondamental, que la droite projective est une ligne fermée, tandis que la droite descriptive est une ligne ouverte; la première offre un ordre circulaire, la seconde un ordre linéaire; deux points partagent celle-ci en trois parties, et celle-là en deux seulement [1]. Un seul point divise la droite descriptive en deux demi-droites, une droite divise le plan descriptif en deux demi-plans, un plan divise l'espace descriptif en deux demi-espaces : tandis que la Géométrie projective ignore les demi-droites, les demi-plans et les demi-espaces, dont la propriété n'est pas *projective* (ne se conserve pas par projection [2]). Tout cela tient à ce que les droites et plans descriptifs offrent une solution de continuité (*à l'infini*). Il s'ensuit que, si l'on veut faire concorder l'espace descriptif avec l'espace projectif, il faut compléter le premier au moyen d'éléments *impropres* qui sont, dans l'espace euclidien, les éléments à l'infini (points, droites et plans) [3].

On sait comment STAUDT introduit les éléments impropres [4]. Il appelle *direction* (*Richtung*) la propriété commune à toutes les droites parallèles entre elles, *inclinaison* (*Stellung*) la propriété commune à tous les plans parallèles entre eux. Puis il remarque qu'une droite est déterminée par un point et une direction, comme par deux points; qu'un plan est déterminé par deux points et une direction, ou par un point et deux directions,

1. Dans la théorie de M. RUSSELL, la droite projective est une relation *symétrique* entre deux quelconques de ses points, tandis que la droite descriptive est une relation *asymétrique* (qui a un sens déterminé).

2. Ces notions de demi-droite, demi-plan, demi-espace appartiennent plutôt à la Topologie, car elles supposent qu'un point, une droite, un plan partagent respectivement la droite, le plan, l'espace en deux régions entièrement séparées.

3. En somme, la Géométrie projective correspond à l'espace de Riemann, tandis que la Géométrie descriptive convient aux espaces d'Euclide et de Lobatchevskij.

4. *Geometrie der Lage*, §§ 3 et 5. Cf. *De l'Infini mathématique*, p. 262.

ou par un point et une inclinaison, comme par trois points. Il est ainsi conduit à assimiler une direction à un point, une inclinaison à une droite, et il les appelle respectivement *point* et *droite impropres*. Ainsi des droites parallèles ont en commun un point impropre, des plans parallèles ont en commun une droite impropre. De plus, deux points impropres (directions) déterminent une droite impropre (inclinaison); l'ensemble des points impropres, ayant un point (impropre) commun avec chaque droite et une droite (impropre) commune avec chaque plan, est donc appelé par analogie *plan impropre*; il est déterminé, soit par trois points impropres, soit par un point et une droite impropres. Grâce à l'introduction des éléments impropres, les propositions de la Géométrie élémentaire se généralisent et se simplifient : on pourra dire, sans restriction, que deux droites d'un plan ou qu'une droite et un plan ont toujours un point commun; et que deux plans ont toujours une droite commune. L'espace descriptif ainsi complété jouit donc des mêmes propriétés que l'espace projectif.

Mais cette « extension » de l'espace n'est pas plus satisfaisante, au point de vue logique, que les prétendues généralisations du nombre : car il ne suffit pas de définir et de nommer une entité pour lui conférer l'existence; et c'est pour cela que les géomètres tendent (pour atténuer leur audace créatrice) à présenter ces définitions comme de simples « conventions » verbales, à réduire les éléments impropres à des mots ou à des façons de parler. C'est là une échappatoire fort peu philosophique; car il reste toujours la question de savoir comment ces conventions verbales peuvent être utiles et commodes, et pourquoi l'introduction de simples mots vides de contenu réel peut servir à généraliser et à simplifier les propositions géométriques. Il y a donc là, quoi qu'en disent les nominalistes, autre chose qu'une question de langage.

Comme dans la généralisation du nombre, la solution logiquement satisfaisante de cette difficulté consiste, au lieu de juxtaposer de nouveaux éléments aux anciens, à substituer à tous les éléments anciens un ensemble d'éléments nouveaux

dont une partie seulement correspond aux anciens[1]. En Géométrie descriptive, à chaque point de l'espace correspond une gerbe de rayons (*Strahlenbündel*) issus de ce point, qu'on appelle le *sommet* de la gerbe. Or les gerbes de rayons ont certaines propriétés indépendantes de leur sommet, et même de l'existence de ce sommet; par exemple, deux droites d'un même plan déterminent une gerbe de rayons; et deux gerbes de rayons déterminent une droite, qui est leur rayon commun. On appellera toutes les gerbes des *points idéaux* : certaines gerbes correspondront aux points actuels (réels), mais aucune gerbe, et par suite aucun point idéal, n'est un point actuel. De même, à chaque droite correspond un faisceau de plans dont elle est l'axe : mais il y a des faisceaux de plans qui n'ont pas d'axe (par exemple, un ensemble de plans parallèles) et qui possèdent d'ailleurs toutes les propriétés des faisceaux de plans. On appellera tous les faisceaux de plans des *droites idéales*; certaines d'entre elles correspondront aux droites actuelles, mais aucune ne sera une droite actuelle. Une droite idéale peut aussi être conçue comme un ensemble de gerbes de rayons, c'est-à-dire de points idéaux, qui est déterminé par deux quelconques d'entre eux. On peut alors énoncer en toute généralité les propositions suivantes : Deux plans quelconques ont une droite idéale commune (c'est-à-dire appartiennent à un même faisceau, qu'ils déterminent); trois plans quelconques ont un point idéal commun (c'est-à-dire appartiennent à une même gerbe, qu'ils déterminent); deux droites idéales d'un plan ont un point idéal commun (c'est-à-dire appartiennent à une même gerbe); un plan et une droite idéale ont un point idéal commun. Deux points idéaux déterminent une droite idéale; seulement, pour pouvoir affirmer que trois points idéaux déterminent un plan, il faut concevoir le *plan idéal* (qui dans certains cas ne correspondra à aucun plan actuel). L'ensemble des points, droites et plans idéaux ainsi définis constitue un espace projectif, c'est-à-dire vérifie

1. Pasch, *op. cit.*, §§ 6, 7, 8; Russell, *op. cit.*, §§ 384-386. Cf. Schur, *Ueber die Grundlagen der Geometrie*, § 1, ap. *Mathematische Annalen*, t. 55 (1902).

tous les postulats de la Géométrie projective, et par suite possède toutes les propriétés que l'on attribue d'ordinaire à l'espace projectif. Ainsi se trouve réalisée la transformation de l'espace descriptif en un espace projectif sans adjonction d'éléments étrangers, et seulement par une classification et une nomenclature nouvelles de ses éléments propres. La question d'existence se trouve du même coup supprimée, les nouveaux éléments n'étant que des ensembles composés des anciens éléments.

Si, au contraire, on compare l'espace descriptif à l'espace projectif en faisant correspondre les points aux points, les droites aux droites et les plans aux plans, on constate que l'espace descriptif est moins complet; il lui manque tous les points d'un plan (pour nous borner au cas où l'espace est euclidien). On comprend dès lors que l'absence de ce plan crée une solution de continuité dans les plans et droites qui le traversent. C'est ce qu'on appelle le plan de l'infini; et c'est pourquoi l'on est obligé de compléter les figures descriptives (euclidiennes) au moyen des droites à l'infini et des points à l'infini pour les rendre projectives.

Après ce que nous avons dit de la définition de l'espace projectif, on conçoit aisément qu'on puisse définir logiquement l'espace descriptif, en faisant rentrer dans cette définition tous les postulats précités; avec cette différence que la droite descriptive sera conçue comme une relation asymétrique, tandis que la droite projective était une relation symétrique entre ses points.

§ D. — Géométrie métrique.

La Géométrie métrique est historiquement antérieure aux Géométries projective et descriptive; c'est la Géométrie élémentaire que tout le monde connaît, et que tous les géomètres ont pratiquée depuis Euclide jusqu'au XIXe siècle [1]. Néanmoins,

1. Sans doute, le théorème de Desargues (sur les triangles homologiques) et celui de Pascal (sur l'hexagone inscrit) sont des propositions

elle est logiquement postérieure à la Géométrie projective et à la Géométrie descriptive, et elle repose nécessairement sur l'une ou sur l'autre, car elle implique des relations de situation (généralement inaperçues ou négligées) auxquelles elle superpose des relations de grandeur. Pour cette raison, elle n'est pas si élémentaire qu'on le croit d'après les manuels; elle est au contraire la partie la plus complexe de la Géométrie. On a pu voir sur combien de postulats se fondent des vérités aussi élémentaires que celle-ci : « Deux points déterminent une droite », qui passe d'ordinaire pour la définition de la droite. On ne se doute pas du nombre de postulats inconsciemment invoqués par Euclide et ses imitateurs dans la démonstration des théorèmes les plus simples. Aussi n'y a-t-il chez eux presque aucune démonstration qui soit logiquement rigoureuse et qui n'implique pas quelque appel à l'intuition[1]. Il est assez piquant de constater que la réputation de rigueur dont la Géométrie d'Euclide a joui pendant des siècles était absolument usurpée, et qu'elle ne méritait guère de passer, aux yeux des philosophes rationalistes du XVIIe siècle, pour le modèle et le type de la déduction logique[2]. C'est seulement de nos jours qu'on s'est rendu compte de tous les postulats impliqués dans les « éléments » de la Géométrie, et que, après l'énumération complète de ces postulats, on a reconstruit toute cette science d'une manière purement analytique. Nombreux sont les travaux des géomètres contemporains sur les principes de la Géométrie. Mais les plus complets et les plus approfondis sont ceux qui ont été exécutés au moyen de la Logistique, parce que cet instrument d'abstraction et de précision permet de dévoiler les pétitions de principe, d'éviter les paralogismes et les appels à l'intuition, et de déjouer les associations d'idées et les habitudes de pensée inséparables du langage usuel.

projectives; mais elles n'étaient pas affranchies de toute considération métrique.

1. C'est ce qui explique et excuse, *historiquement*, la théorie de Kant sur la nature synthétique des démonstrations géométriques. Voir l'Appendice.

2. Voir, dans RUSSELL, *The Principles of Mathematics*, §§ 389-391, des

Pour constituer logiquement la Géométrie métrique, il faut adjoindre à la notion de *point* une autre notion première, et celle-ci doit impliquer une idée de grandeur. Cette seconde notion varie suivant les systèmes, et en fait la différence essentielle. L'idée la plus simple et la plus naturelle est de prendre pour notion première une entité analogue à la droite projective et au segment descriptif, à savoir le segment de droite *en tant que grandeur*, c'est-à-dire la distance de deux points. Ç'a été en effet l'idée de LEIBNIZ, et c'est sur cette base qu'il a essayé d'édifier son calcul géométrique [1]. Ce système a été repris à titre d'essai par M. PEANO [2] : l'idée primitive qu'il admet se réduit à ceci : « *a*, *b*, *c* étant 3 points, la distance de *a* à *c* est égale à celle de *b* à *c* [3]. » Ainsi il ne postule même pas l'égalité de 2 distances en général, qui est une relation entre 4 points, mais seulement l'équidistance d'un point par rapport à deux autres (relation entre 3 points). Il donne de la droite et du plan les mêmes définitions que Leibniz : la droite *ab* est le lieu des points déterminés d'une manière univoque par leurs distances aux 2 points *a* et *b*; le plan *abc* est le lieu des points déterminés d'une manière univoque par leurs distances aux 3 points *a*, *b*, *c* [4]. Il définit ensuite le *milieu* de 2 points (c'est le point de la droite *ab* qui est à égale distance de *a* et *b*), puis l'égalité de deux vecteurs (le vecteur *ab* est égal au vecteur *cd*, si le milieu de *a* et *d* coïncide avec le milieu de *b* et *c*); et l'égalité des distances en général est définie au moyen de l'égalité des vecteurs. Ainsi cette théorie ne se

exemples des fautes logiques qui fourmillent dans les 26 premières propositions d'Euclide.

1. Voir notre ouvrage sur *La Logique de Leibniz*, ch. IX : *Le Calcul géométrique*, et les textes qui y sont cités.

2. *La Geometria basata sulle idee di punto e distanza*, ap. *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino* (1902).

3. M. PIERI a indiqué ce système dans son mémoire *Della Geometria elementare*, p. 4 (1899).

4. Au même ordre d'idées se rattachent les définitions données par LEIBNIZ du plan et de la droite : « Le plan (la droite) est le lieu des points de l'espace (du plan) équidistants de deux points. » Mais il est très difficile de tirer de ces définitions les autres propriétés du plan et de a droite.

développe pas d'une manière autonome, elle rejoint la théorie qui a pour base l'idée de vecteur, en fournissant une définition de celle-ci.

On est ainsi amené à substituer à la notion de distance celle de vecteur, qui est plus complexe : le vecteur est une longueur dirigée; l'égalité des vecteurs implique, outre l'égalité de distance (ou de longueur), l'identité de la direction et du sens. La théorie des vecteurs fait partie du *Calcul de l'extension* de GRASSMANN; mais ce calcul présuppose la connaissance de la Géométrie élémentaire; il fallait donc le soumettre à l'analyse logique et le réduire à des principes autonomes. C'est ce qu'a fait M. PEANO dans un mémoire [1] et dans le *Formulaire de Mathématiques.* Prenant la notion de vecteur pour indéfinissable, il la représente comme la différence de deux points ($a - b$, si b est l'origine et a l'extrémité du vecteur); et il la caractérise par les postulats suivants :

I. $$a - b = a - b$$

II. $$a - b = c - d . \supset . c - d = a - b$$

III. $$a - b = c - d . c - d = e - f . \supset . a - b = e - f$$

qui signifient que l'égalité des vecteurs est une relation réflexive, symétrique et transitive (ce qui justifie le nom d'égalité donné à cette relation). On a en outre :

IV. $$a - b = c - d . \supset . a - c = b - d$$

Ces quatre postulats peuvent se démontrer, si l'on admet la définition de l'égalité des vecteurs donnée dans l'alinéa précédent. Il faut leur en adjoindre deux autres pour achever de déterminer les propriétés des vecteurs :

V. $$a - c = b - c . \supset . a \equiv b$$

« Si $a - c = b - c$, les points a et b coïncident. »

1. *Analisi della teoria dei vettori*, ap. *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino* (1898).

VI. Étant donnés 3 points a, b, c, il y a un point x tel que :

$$x - a = b - c$$

Le postulat V signifie que, si l'origine d'un vecteur donné est déterminée, son extrémité l'est aussi d'une manière unique. Le postulat VI signifie que, étant donné un vecteur quelconque $(b - c)$, on peut construire un vecteur égal ayant pour origine un point quelconque a [1].

On peut définir le vecteur *zéro* comme le vecteur dont les extrémités coïncident. Puis on définit la somme d'un point et d'un vecteur : c'est l'extrémité du vecteur donné, quand on le place de telle sorte qu'il ait pour origine le point donné. L'existence du point ainsi construit résulte du postulat VI. On définit ensuite l'addition des vecteurs, et on démontre qu'elle est commutative et associative. On définit le produit d'un vecteur par un nombre, d'abord entier, puis rationnel ; il faut alors admettre les deux postulats suivants :

VII. Pour que le produit d'un vecteur et d'un nombre non nul soit nul, il faut que le vecteur soit nul.

VIII. Il existe un vecteur qui est le n^e d'un vecteur donné, c'est-à-dire qui, multiplié par n, produit le vecteur donné.

On introduit ensuite ce que Grassmann appelle le *produit interne* de deux vecteurs : c'est le produit des longueurs des deux vecteurs et du cosinus de leur angle [2]. Mais, comme on

1. Les postulats V et VI ne peuvent pas se déduire de la définition donnée plus haut (p. 182) de l'égalité des vecteurs. En effet, $a - c = b - c$ signifie que le milieu de ac coïncide avec celui de bc ; soit d ce point ; pour en conclure que les points a et b coïncident, il faut admettre que le segment cd ne peut être prolongé au delà de d d'une longueur égale à la sienne que d'une manière unique. De même, $x - a = b - c$ signifie que le milieu de cx coïncide avec le milieu de ab ; soit d ce point ; pour en conclure que le point x existe, il faut admettre la même chose au sujet du segment cd (qui existe). On postule ainsi deux propriétés de la droite : 1° une droite peut être prolongée indéfiniment au delà d'un de ses points (ou pour mieux dire, ce prolongement *existe*) ; 2° on peut porter une longueur donnée sur une droite à partir d'un point donné et dans un sens donné, de telle sorte que l'extrémité soit déterminée d'une manière univoque.

2. En Mécanique, ce sera le travail effectué par la force représentée par un des vecteurs, quand son point d'application décrit l'autre vecteur.

ne peut invoquer ici aucune notion de Géométrie élémentaire, on est obligé de prendre le produit interne pour notion indéfinissable[1], et de le caractériser par les postulats suivants :

IX. u et v étant des vecteurs, leur produit interne $u \times v$ est un nombre réel.

X. Loi commutative : $u \times v = v \times u$

XI. Loi distributive : $(u + v) \times w = (u \times w) + (v \times w)$.

XII. Si u est un vecteur non nul, $u \times u$ est un nombre réel positif[2].

Le produit $u \times u$ s'appellera le carré u^2 du vecteur u. On définit le module de u (ou la longueur de u) comme la racine carrée arithmétique (ou positive) du nombre u^2 :

$$\text{mod}\, u = \sqrt{u^2}.$$

On démontre alors la proposition suivante :

$$\text{mod}\,(u + v) \leqq \text{mod}\, u + \text{mod}\, v$$

qui exprime ce théorème de Géométrie élémentaire : Dans un triangle chaque côté est inférieur ou égal à la somme des deux autres.

Pour pouvoir définir le produit d'un vecteur par un nombre irrationnel, il faut d'abord définir ce qu'est un vecteur *limite* d'un vecteur variable. Le vecteur a est dit *limite* du vecteur variable fx (fonction définie dans l'ensemble X) pour $x = x_0$, si, quand x tend vers x_0 par des valeurs de l'ensemble X, le module de $(fx - a)$ tend vers zéro (on suppose la notion de limite définie pour les nombres). Alors, si x_0 est un nombre irrationnel limite du nombre rationnel (variable) x, le produit du vecteur u par x_0 est là limite des produits du même vecteur par le nombre rationnel x quand celui-ci tend vers x_0. Il faut postuler (XIII) l'existence de cette limite.

Les produits d'un vecteur i par tous les nombres réels sont tous les vecteurs parallèles à i. Mais ces vecteurs peuvent être

1. En revanche, on définira le cosinus (et les autres fonctions trigonométriques) au moyen de cette notion.

2. C'est en effet le carré de la longueur (ou du module) de u.

situés sur la même droite que i. Pour sortir de cette droite, il faut postuler (XIV) l'existence de vecteurs non parallèles à i. Soient i et j deux vecteurs non parallèles; l'ensemble $\text{q}\,i + \text{q}\,j$ (où q représente un nombre réel quelconque) est l'ensemble des vecteurs contenus dans le même plan que i et j (ou parallèles à ce plan). Pour pouvoir sortir de ce plan, il faut postuler (XV) l'existence de vecteurs qui ne soient pas de la forme $\text{q}\,i + \text{q}\,j$. Soit k un tel vecteur, l'ensemble des vecteurs $\text{q}\,i + \text{q}\,j + \text{q}\,k$ sera l'ensemble des vecteurs de l'espace à trois dimensions. Si l'on veut se borner à cet espace, c'est-à-dire limiter à trois le nombre des dimensions, il faudra admettre un dernier postulat (XVI), à savoir que tout vecteur est de la forme $\text{q}\,i + \text{q}\,j + \text{q}\,k$. On démontre que, si un vecteur $x\,i + y\,j + z\,k$ est nul, ses trois *coordonnées* (x, y, z) sont nulles; d'où il résulte que, si deux vecteurs sont égaux, leurs trois coordonnées sont égales chacune à chacune. On applique les coordonnées à tous les points de l'espace en attribuant à chacun d'eux les coordonnées du vecteur qu'il détermine avec un point fixe O pris pour *origine* commune.

Dans cette théorie on peut faire rentrer la théorie fondée sur l'idée de *distance*. En effet, la distance de deux points a, b n'est pas autre chose que la longueur (le module) du vecteur $b - a$ (ou du vecteur $a - b$). C'est la même idée sous deux expressions différentes; la distance se rapporte au couple de points, et la longueur au vecteur.

On peut aussi y faire rentrer la théorie descriptive fondée sur l'idée de *segment*. En effet, on peut définir le segment ab par l'expression vectorielle : $a + \theta\,(b - a)$; $(b - a)$ représentant le vecteur ab, θ un nombre réel quelconque supérieur à 0 et inférieur à 1, $\theta\,(b - a)$ représente un vecteur qui est une partie du vecteur ab, et si l'on ajoute un tel vecteur au point a, on obtient un point quelconque du segment ab. Une fois défini le segment de deux points, on peut définir, on le sait, le triangle de trois points et le tétraèdre de quatre points. On peut alors démontrer le théorème suivant : « Dans un triangle abc, la somme des distances d'un point intérieur d aux sommets a et b

est au plus égale à la somme des longueurs des côtés *ac*, *bc*. » Si aux seize postulats précédents on ajoute les trois postulats suivants relatifs aux points : « Les points forment une classe ; il y a au moins un point; étant donné un point, il en existe au moins un autre », on aura les postulats nécessaires [1] et suffisants pour constituer la Géométrie métrique; toutes les autres notions peuvent se définir logiquement au moyen de celles que nous avons citées, et tous les théorèmes peuvent se déduire logiquement des principes énumérés.

Ce système est donc logiquement irréprochable; mais il n'est pas très satisfaisant au point de vue philosophique, parce que (malgré l'élaboration à laquelle M. Peano a soumis les idées de Grassmann) il reste encore, parmi les principes, trop de vérités d'intuition qui sont des théorèmes de Géométrie élémentaire; par exemple celui-ci (IV) : « Si les vecteurs *ab* et *cd* sont égaux, les vecteurs *ac* et *bd* sont égaux », qui équivaut à ce théorème connu : « Si dans un quadrilatère deux côtés sont égaux et parallèles de même sens, les deux autres côtés sont aussi égaux et parallèles de même sens. » En outre, on y admet comme notion indéfinissable une idée assez complexe, celle du produit relatif des vecteurs. Il n'est pas étonnant, dès lors, qu'on obtienne presque immédiatement, comme conséquences logiques de ces principes, des théorèmes assez compliqués, comme le théorème de Lagny : « Dans tout parallélogramme, la somme des carrés des diagonales est égale à la somme des carrés des quatre côtés », qui se traduit par l'apparente identité algébrique :

$$(u+v)^2+(u-v)^2=2\,(u^2+v^2)$$

Enfin, il importe d'observer que le calcul des vecteurs ne convient qu'à la Géométrie euclidienne, car il suppose le postulatum d'Euclide; il est aisé de s'en rendre compte, si l'on remarque que l'égalité de deux vecteurs implique leur *paral-*

1. Ils sont nécessaires, car M. Peano a prouvé leur indépendance ordonnée : *Formulaire de Mathématiques*, t. IV, § 79 (1903).

lélisme, et qu'elle est une relation *uniforme* [1]. Le système de postulats ainsi obtenu manque donc de généralité logique. Pour toutes ces raisons, il semble qu'une analyse plus fondamentale des concepts et des principes de la Géométrie soit désirable et possible [2].

On peut espérer la trouver dans une série d'autres systèmes qui se distinguent des précédents en ce qu'ils prennent pour notion fondamentale, non plus une figure ou une grandeur particulière, mais une relation générale entre les figures : cette relation est la *congruence* ou « égalité géométrique », qu'on définit d'ordinaire par la possibilité de superposition. Mais il faut ici se mettre en garde contre un ὕστερον πρότερον logique, auquel la méthode d'Euclide nous rend trop enclins. On sait qu'Euclide démontre certains théorèmes relatifs à l' « égalité » (des triangles notamment) par la *superposition* des figures considérées. Or ce procédé (qu'Euclide évite d'ailleurs d'employer toutes les fois qu'il le peut) constitue, par lui-même, un appel manifeste à l'intuition. Pour le justifier logiquement, il faudrait prouver, dans chaque cas particulier, que les éléments de figures qu'on superpose sont égaux, c'est-à-dire congruents; mais alors la superposition deviendrait inutile. En un mot, ce n'est pas parce qu'elles sont superposables que deux figures sont congruentes, mais parce qu'elles sont congruentes qu'elles sont superposables [3]. C'est pourquoi il convient de prendre la relation de congruence comme notion première.

1. Voir dans RUSSELL, *op. cit.*, § 414, la définition formelle de l'espace euclidien à 3 dimensions en termes de la théorie des vecteurs.

2. Le système des vecteurs a en revanche l'avantage d'être l'introduction naturelle aux divers calculs géométriques (calcul de Grassmann, calcul des quaternions) ainsi qu'aux divers systèmes de coordonnées qui servent de base à la Géométrie analytique, et par suite à la conception analytique de l'espace (par la méthode de RIEMANN). Mais il ne faut pas oublier que cette conception analytique présuppose les propriétés projectives et métriques de l'espace, et par conséquent ne peut être considérée comme fondamentale au point de vue philosophique.

3. On peut ajouter que la superposition suppose le mouvement, lequel implique une pétition de principe analogue, comme on le verra plus loin.

Il y a trois systèmes qui reposent sur la notion première de congruence : celui de M. PASCH, qui admet la congruence entre des figures quelconques; celui de M. HILBERT, qui admet la congruence entre les segments et entre les angles; et celui de M. VERONESE, qui admet la congruence entre les segments seulement[1]. Nous n'énumérerons pas tous les postulats de ces divers systèmes; nous nous bornerons à caractériser chacun d'eux par ses traits essentiels.

Dans le système de M. PASCH[2], la congruence étant admise comme relation indéfinissable entre deux figures quelconques, c'est-à-dire entre deux ensembles d'un nombre fini de points, on doit définir la congruence des segments et celle des angles. Deux segments ab, cd sont congruents, quand les couples de points (a, b) et (c, d) sont congruents. Deux angles AOB, A′O′B′ sont congruents, si, lorsqu'on prend sur leurs côtés correspondants des segments congruents (OA et O′A′, OB et O′B′), les figures OAB, O′A′B′ sont congruentes[3]. De cette définition il résulte immédiatement que deux triangles sont congruents, lorsqu'ils ont un angle congruent compris entre deux côtés congruents; et l'on peut en déduire les deux autres « cas d'égalité des triangles[4] ».

Le système de M. HILBERT[5] admet au contraire comme primitives la congruence entre les segments et la congruence entre les angles. On définit comme suit la congruence de deux

1. F. ENRIQUES : *Questioni riguardanti la Geometria elementare*, article III : *Della congruenza e del movimento,* par A. GUARDUCCI (Bologna, 1900).

2. *Vorlesungen über neuere Geometrie*, § 13 (1882). Il faut bien distinguer, chez cet auteur, le système des postulats de la congruence du système des postulats de la Géométrie descriptive (ou de position).

3. Cette définition implique le théorème élémentaire : « Deux triangles sont égaux, lorsqu'ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux », qu'EUCLIDE « démontre » par superposition.

4. En admettant que la congruence de deux triangles consiste simplement dans la congruence des figures formées par leurs 3 sommets.

5. *Grundlagen der Geometrie* (Leipzig, Teubner, 1899). On sait que ces auteur répartit les postulats de la Géométrie en 5 groupes : I. Axiomes de connexion; II. Axiomes d'ordination : III. Axiome des parallèles; IV. Axiomes de congruence; V. Axiome d'Archimède. Nous ne considérons ici que les axiomes de congruence. Les axiomes I et II sont les principes de la Géométrie de position.

figures en général : « Deux figures sont congruentes, quand tous les segments correspondants et tous les angles correspondants sont congruents. » Le lien entre les deux congruences primitives est établi par le postulat suivant (IV, 6) : « Si deux triangles ont deux côtés congruents et l'angle compris congruent, ils ont les deux autres angles congruents. » D'où l'on déduit immédiatement que deux triangles sont congruents, quand ils ont un angle congruent compris entre côtés congruents. On démontre ensuite les deux autres cas d'égalité des triangles. Comme on voit, on est obligé, dans ce système, de postuler un des cas d'égalité des triangles.

Le système de M. VERONESE[1] repose uniquement sur la congruence entre segments. Il est caractérisé par le postulat suivant, qui est absent des systèmes Pasch et Hilbert : « Un segment n'est pas congruent à une de ses parties. » C'est, appliqué aux segments, le fameux axiome : « Le tout est plus grand que la partie », qui n'est nullement un axiome logique et nécessaire, comme on l'a cru. Le postulat qui permet de passer de la congruence des segments à la congruence des angles est le suivant : « Soient 2 couples de droites qui se coupent ; si l'on porte sur les droites correspondantes respectivement les segments congruents AB, A'B' et AC, A'C', et si les segments BC, B'C' se trouvent être congruents, les deux couples de droites sont congruents ». En d'autres termes, 2 angles sont congruents lorsqu'ils appartiennent à 2 triangles qui ont les 3 côtés congruents[2]. Cela revient, en somme, à postuler le 3e cas d'égalité des triangles.

Ainsi chacun de ces trois systèmes est obligé de postuler l'un des cas d'égalité des triangles, c'est-à-dire une proposition dérivée et relativement compliquée. Ils ne semblent donc pas encore avoir poussé assez loin l'analyse des principes. Il est toutefois intéressant de remarquer que les systèmes Pasch et Hilbert permettent de démontrer rigoureusement les théo-

1. *Fondamenti di Geometria a più dimensioni* (Padova, 1891); *Elementi di Geometria*, avec un *Appendice* (Padova, 1897).
2. Cf. le système de M. PASCH.

rèmes relatifs aux perpendiculaires, et notamment le théorème fondamental de cette théorie : « Tous les angles droits sont égaux », que l'on « démontre » d'ordinaire par la méthode de superposition [1].

Il ne reste plus qu'une méthode pour établir les fondements de la Géométrie : c'est celle qui fait appel à l'idée de mouvement. Cette méthode est fort ancienne, car dans la Géométrie classique on a souvent recours, dans les démonstrations, au déplacement d'une figure ou d'une partie de figure. Elle est aujourd'hui décriée, et avec raison, en un certain sens. On allègue d'abord qu'il est contraire aux règles de simplicité et d'économie de faire intervenir en Géométrie une notion qui appartient à la Mécanique, tout au moins à la Cinématique. En outre, depuis que l'on a conçu l'axiome de libre mobilité comme caractérisant les espaces « à courbure constante » à l'exclusion des autres, on s'est aperçu que c'était postuler cet axiome que de déplacer la moindre figure en supposant, naturellement, qu'elle restait égale à elle-même. A un point de vue plus philosophique, on remarque que le déplacement d'une figure quelconque présuppose l'existence d'une suite continue de figures congruentes à celle-là, qui en soient les positions successives; et on en conclut que, si l'existence de celles-ci est établie, le déplacement de celle-là devient absolument inutile. La considération du mouvement implique donc une pétition de principe ou un ὕστερον πρότερον : on se sert du mouvement pour « montrer » l'existence de figures congruentes, alors qu'en réalité le mouvement présuppose cette existence. En un mot, il suppose l'existence de figures différentes possédant les mêmes propriétés métriques, et par suite il ne peut servir à définir ces propriétés.

Toutes ces objections sont justes, mais elles ne portent que contre le mouvement réel et physique, le mouvement des corps dans l'espace, qui est en effet étranger à la Géométrie,

1. ENRIQUES, *Questioni...*, art. cité, § 5.

et dont l'intervention aurait pour conséquence de subordonner la Géométrie à la Physique[1]. Mais le mouvement que l'on emploie en Géométrie n'est pas en réalité un mouvement : on ne considère pas la suite continue des positions intermédiaires du mobile, mais seulement la position initiale et la position finale[2]. Cela prouve que le prétendu « mouvement » se réduit, au fond, à la congruence de ces deux positions. Ainsi le mouvement géométrique n'est qu'un autre nom de la congruence; c'est seulement une façon plus intuitive de se représenter les relations de congruence. Il n'y a rien à objecter à l'emploi en Géométrie d'une telle notion du mouvement, du moment qu'on ne prétend pas créer ou démontrer les congruences au moyen du mouvement (comme dans la méthode de superposition). En définitive, le mouvement géométrique n'est pas autre chose qu'une transformation ponctuelle de l'espace en lui-même, c'est-à-dire une correspondance (une relation biuniforme) établie entre deux ensembles de points congruents. La notion de mouvement n'est plus qu'une image commode pour se représenter distinctement la corrélation des deux figures et l'unité de chacune d'elles[3].

Telle est la méthode qu'a employée M. PIERI pour reconstruire logiquement les éléments de la Géométrie métrique, tels qu'ils se trouvent dans les premiers livres d'EUCLIDE; et cela, au moyen de deux notions indéfinissables seulement : celle de *point* et celle de *mouvement*[4]. Nous allons énumérer les

1. C'est ce que font les géomètres empiristes, quand (comme HELMHOLTZ) ils essaient de définir ou d'expliquer les propriétés métriques de l'espace en supposant des corps *rigides*, des solides *invariables* et *indéformables*.

2. Par suite, on doit rejeter les définitions qui présentent les lignes comme engendrées par des points, les surfaces par des lignes, les solides par des surfaces, car ces définitions (outre qu'elles exigent que l'on conçoive des lignes et des surfaces qui se déforment tout en se déplaçant) présupposent la continuité de l'espace, loin de la créer. Ainsi l'on doit préférer les définitions statiques aux définitions cinématiques, quand ce ne serait que pour cette raison, que celles-ci supposent celles-là. On voit ce qu'il faut penser de la théorie suivant laquelle les définitions géométriques sont (ou doivent être) génétiques.

3. RUSSELL, *op. cit.*, § 390.

4. *Della Geometria elementare come sistema ipotetico-deduttivo* : *Mono-*

postulats et les principales propositions de cette théorie, qui est l'analyse la plus approfondie des principes de la Géométrie. Il importe de remarquer que cette théorie est absolument autonome, qu'elle est indépendante de la Géométrie projective et de la Géométrie descriptive, et qu'elle retrouve les propositions de celle-ci en partant des principes et des notions premières qui lui sont propres.

« I. *Point* et *mouvement* sont des concepts génériques ou des classes. »

« II. Il existe au moins un point. »

« III. Si p est un point, il existe un point différent de p. »

On appellera *figure* tout ensemble de points. Deux figures sont identiques (ou coïncident) quand elles sont composées des mêmes points. Deux points sont identiques (coïncident) quand toute figure qui contient l'un contient l'autre. Ce sont là des définitions de l'*égalité* et de l'*identité* logiques qu'il suffit de rappeler.

« IV. Tout mouvement est une correspondance biuniforme entre deux figures. » Cela signifie qu'à des points identiques correspondent des points identiques, et qu'à des points différents correspondent des points différents.

« V. Quel que soit le mouvement μ, qui fait correspondre par exemple le point y au point x, il existe un mouvement $^{c}\mu$ qui fait correspondre le point x au point y (quels que soient x et y)[1]. » Ce mouvement est dit *inverse* du premier; c'est la relation *converse* de la relation que représente le mouvement primitif.

« VI. Deux mouvements μ et ν effectués successivement, l'un sur le résultat de l'autre, équivalent à un seul mouvement[2]. » C'est ce qu'on exprime en disant que les mouvements

grafia del punto e del moto, ap. *Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino* (1899). Voir le mémoire du même auteur : *Sur la Géométrie envisagée comme un système purement logique*, dans la *Bibliothèque du Congrès de Philosophie*, t. III. Cf. les « postulats du mouvement » proposés par M. Peano : *Sui fondamenti della Geometria*, ap. *Rivista di Matematica*, t. IV, p. 78 sqq. (1894).

1. Postulat III de M. Peano.
2. Postulat IV de M. Peano.

forment un *groupe*. Le dernier s'appelle *résultant* des deux autres; c'est le *produit relatif* des deux relations μ et ν; on le représentera par $\mu_*\nu$.

En particulier, le produit $\mu_*{}^c\mu$ (quel que soit μ) sera un mouvement qui laisse fixes tous les points, c'est-à-dire qui transforme chaque point en lui-même. C'est ce qu'on nomme la transformation identique (la relation d'identité), ou le repos. Ainsi le repos est un cas particulier du mouvement [1]. Pour exclure ce cas exceptionnel, on dira d'un mouvement qu'il est *effectif* ou *propre*.

« VII. Pour chaque couple de points distincts, il existe un mouvement effectif qui les laisse fixes. » Ce postulat affirme l'existence du mouvement de rotation d'une figure quelconque autour de deux de ses points.

« VIII. *a*, *b*, *c* étant des points distincts, s'il existe un mouvement effectif qui les laisse fixes, tout autre mouvement qui laisse fixes *a* et *b* laissera fixe aussi *c*. »

Ce postulat est le fondement de la notion de *droite* : dans l'hypothèse énoncée, les trois points *a*, *b*, *c* seront dits *collinéaires*; et la droite *ab* sera, par définition, l'ensemble des points collinéaires avec *a* et *b*, c'est-à-dire des points qui restent fixes dans tout mouvement qui laisse *a* et *b* fixes [2]. On remarquera que la droite est définie dans sa totalité, et que rien dans cette définition n'implique un ordre ou une situation relative entre les points *a*, *b*, *c*. On démontre qu'une droite est déterminée par deux quelconques de ses points, c'est-à-dire que, si *c* et *d* sont des points distincts de la droite *ab*, celle-ci coïncide avec la droite *cd*.

Il convient de remarquer que le postulat VIII n'est vrai que dans l'espace à trois dimensions, que par suite il implique la limitation à trois du nombre des dimensions, et que la définition précédente de la droite n'est valable que dans un tel

1. Postulat II de M. Peano : « L'identité est un mouvement, c'est-à-dire toute figure est congruente à elle-même » (*loc. cit.*, p. 78).

2. C'est là une des définitions de la droite proposées par Leibniz. Elle ne diffère pas, au fond, de la définition fondée sur la notion de congruence (v. p. 182).

espace. De plus, ce même postulat exclut l'espace riemannien (espace elliptique de KLEIN), de sorte que toutes les propositions suivantes ne sont vraies que dans l'espace euclidien et l'espace lobatchevskien.

On peut démontrer que, si trois points *a*, *b*, *c* sont collinéaires, leurs correspondants (dans un mouvement quelconque) sont aussi collinéaires; en d'autres termes, que tout mouvement transforme une droite en une droite. Cette proposition était un des postulats de M. PASCH et de M. PEANO [1].

On peut maintenant définir le *plan* comme suit : « *a*, *b*, *c* étant trois points non collinéaires, on appelle plan *abc* la figure formée par toutes les droites qui joignent *a* à un point de *bc*, *b* à un point de *ac*, et *c* à un point de *ab*. »

On démontre que les droites *ab*, *ac*, *bc* appartiennent au plan *abc* ; et que tout mouvement transforme un plan en un plan. Mais on ne peut pas encore prouver qu'un plan est déterminé par trois points. Il faut admettre le postulat :

« IX. *a*, *b*, *c* étant trois points non collinéaires, et *d* un point de *bc* autre que *b*, le plan *abd* est contenu dans le plan *abc*. » On en déduit aussitôt que les plans *abc* et *abd* coïncident. On démontre alors que, si *d*, *e*, *f* sont trois points non collinéaires du plan *abc*, celui-ci coïncide avec le plan *def*; c'est ce qu'on exprime en disant qu'un plan est déterminé par trois de ses points non collinéaires. On démontre aussi qu'un plan contient toute droite qui joint deux de ses points [2].

On peut définir la sphère de centre *a* qui passe par *b* comme l'ensemble des points pour chacun desquels il y a un mouvement qui le porte en *b* en laissant *a* fixe. On la représentera par b_a [3]. On remarquera que cette définition équivaut à la définition fondée sur la congruence : « ensemble des points *c*

1. Ce que M. PEANO exprime en disant que le mouvement est une espèce d'*affinité* (Postulat I, *loc. cit.*, p. 78).

2. Théorème d'Euclide (XI, 1) pris par certains auteurs modernes (LEGENDRE) pour définition du plan.

3. On remarquera que par *sphère* on entend ici la surface sphérique; on distinguera plus loin les points intérieurs et extérieurs à la sphère : les points intérieurs constitueront, avec la surface, le solide appelé *sphère*.

tels qu'on ait : $ac = ab$ »[1]. Tout mouvement transforme une sphère en une sphère; et tout mouvement qui laisse fixe le centre d'une sphère la transforme en elle-même. Si deux sphères, de centres a et b, n'ont qu'un point commun c, ce point devra appartenir à la droite ab.

Pour pouvoir définir certains mouvements particuliers qui consistent à rabattre une droite sur elle-même, il faut introduire les postulats suivants :

« X. a et b étant des points distincts, il y a un mouvement qui laisse fixe a, et transforme b en un autre point de la droite ab. » Ce mouvement est évidemment effectif, et transforme la droite ab tout entière en elle-même. De ce postulat on déduit que la sphère de centre a passant par b a un second point commun avec la droite ab.

« XI. a, b étant des points distincts, si deux mouvements qui laissent fixe a transforment b en un autre point de la droite ab, ce point est le même dans les deux mouvements. » En d'autres termes, la sphère de centre a passant par b n'a qu'*un seul* autre point commun avec la droite ab. Ce point, qui est ainsi déterminé d'une manière univoque, s'appellera le symétrique de b par rapport à a [$\text{sym}_a b$]. Soit b' ce point : on peut prouver que le symétrique de b' par rapport à a est b.

« XII. a, b étant des points distincts, il y a un mouvement qui transforme a en b, et qui laisse fixe un point de la droite ab. » Ce même mouvement transforme b en a; a et b sont symétriques par rapport au point fixe de la droite ab. Ce point fixe est unique; on l'appellera le *milieu* de a et b [med (a, b)]. C'est le centre d'une sphère qui passe par a et b, et c'est le seul point de la droite ab qui possède cette propriété. Les propriétés du symétrique et du milieu se conservent dans tout mouvement.

Pour pouvoir définir le rabattement d'un plan sur lui-même, on a besoin des postulats suivants :

« XIII. a, b, c étant trois points non collinéaires, il y a un

1. C'est encore une définition de Leibniz.

mouvement qui laisse fixes a et b, et qui transforme c en un autre point du plan abc. » On dit que ce mouvement rabat le plan abc sur lui-même en le faisant tourner autour de a et b.

« XIV. a, b, c étant trois points non collinéaires, et d, e des points du plan abc communs aux sphères c_a et c_b et différents de c, ces deux points d et e coïncident. » En d'autres termes, il n'y a dans le plan abc qu'un seul point, autre que c, qui ait les mêmes distances que c aux points a et b, quand a, b, c ne sont pas en ligne droite (car, quand ils sont collinéaires, il n'y en a aucun).

On définit le *cercle* : l'ensemble des points qui appartiennent à la fois à une sphère et à un plan qui en contient le centre. Le cercle a pour centre le centre de la sphère. Il pourra s'indiquer par la même notation que la sphère, quand on saura dans quel plan il se trouve. Les postulats XIII et XIV prennent alors la forme suivante : « Dans le plan abc, les cercles c_a et c_b ont un point commun, et un seul, autre que c. »

On peut définir la *perpendicularité* de deux droites comme une relation entre 3 points : « Dire que le couple (a, c) est perpendiculaire au couple (a, b) [ce qui s'écrit : $(a, c) \perp (a, b)$], c'est dire qu'il existe un mouvement qui laisse fixes a et b et qui transforme c en un autre point de la droite ca. » Cet autre point est, comme on sait, le symétrique de c par rapport à a. Celui-ci se trouve donc sur la sphère c_b ; et réciproquement, si sym $_ac$ se trouve sur c_b, $(a, c) \perp (a, b)$. La relation de perpendicularité est symétrique. On la transforme aisément en une relation entre les deux droites ab, ac, pour obtenir la notion usuelle de perpendicularité. On démontre que, par un point extérieur à une droite, on peut lui mener une perpendiculaire, et une seule ; bien entendu, cette démonstration est logiquement fondée sur les postulats énoncés, et non pas, comme la démonstration ordinaire, sur des considérations intuitives.

Pour pouvoir sortir du plan, et considérer plusieurs plans, il faut admettre le postulat :

« XV. *a*, *b*, *c* étant des points non collinéaires, il existe au moins un point hors du plan *abc*. »

En effet, nous n'étions pas encore sortis du plan, bien que nous ayons appris à le retourner : c'est que, comme nous l'avons dit, on n'a pas à considérer les positions intermédiaires du mouvement; nous avons admis le retournement sans savoir comment il est physiquement possible, ni par où passe le plan pour se retourner sur lui-même. On dira que des points sont *complanaires*, s'ils appartiennent tous à un même plan. Si 4 points ne sont pas complanaires, 3 quelconques d'entre eux ne peuvent être collinéaires.

Il faut admettre qu'on puisse rabattre un plan sur un autre plan; c'est l'objet du postulat suivant :

« XVI. *a*, *b*, *c*, *d* étant 4 points non complanaires, il existe un mouvement qui laisse fixes *a* et *b* et qui transforme *d* en un point du plan *abc*. » Par suite, puisqu'un plan est déterminé par 3 points, le plan *abd* vient coïncider avec le plan *abc*. Les postulats XIII et XVI affirment la possibilité du mouvement de *rotation*. On peut alors démontrer qu'il existe un mouvement de *translation*, c'est-à-dire tel qu'un plan glisse sur lui-même pendant qu'une de ses droites glisse sur elle-même [1]. On démontre ensuite qu'on peut mener une perpendiculaire à une droite en un de ses points dans un plan qui la contient. Que cette perpendiculaire soit unique, cela a pu être démontré auparavant, indépendamment du postulat XVI.

On peut dire qu'un point *a* est *équidistant* de deux points *b* et *c*, s'il est le centre d'une sphère qui passe par *b* et *c*. On démontre alors que le lieu des points équidistants de deux points distincts *a* et *b*, dans un plan contenant *a* et *b*, est la droite perpendiculaire à *ab* au milieu de *a* et *b*; puis, qu'une droite *pa* perpendiculaire à deux droites *ab*, *ac* est aussi perpendiculaire à toute droite qui passe par *a* et est située dans le plan *abc*. D'où la définition de la *perpendicularité* entre une

1. C'est la définition du mouvement de translation donnée par M. Méray, qui en postule la possibilité : *Nouveaux Eléments de Géométrie*, 2e éd., § 35 Dijon, 1903).

droite et un plan. On établit ensuite le *théorème des 3 perpendiculaires*, d'où il résulte que par un point extérieur à un plan on peut lui mener une perpendiculaire, et une seule. On démontre aussi que par un point d'un plan on peut lui mener une perpendiculaire, et une seule. (Cela exclut la possibilité d'une 4[e] dimension, en conséquence du postulat VIII.) Inversement, il n'y a qu'un plan perpendiculaire à une droite en un de ses points. On prouve alors que deux plans qui ont un point commun ont une droite commune (ce qui est une conséquence des trois dimensions), et cela, sans faire appel, comme d'ordinaire, à des considérations intuitives de Topologie (distinction des deux régions de l'espace que sépare un plan)[1].

Les 16 premiers postulats, et les propositions qui en découlent, concernent uniquement des relations de situation. On va voir maintenant comment de ces relations de situation on peut passer aux relations de grandeur qui constituent l'objet propre de la Géométrie métrique. Par opposition aux propriétés descriptives qui nous ont occupé jusqu'ici, on peut appeler celles qui vont être mentionnées des propriétés segmentaires, car elles reposent sur la notion fondamentale du *segment rectiligne* compris entre deux points.

Un point est dit *intérieur* à une sphère, s'il est le milieu de deux points distincts de cette sphère. Il est dit *extérieur* dans le cas contraire (et s'il n'appartient pas à la surface de la sphère). Dans un plan, un point est dit *intérieur* ou *extérieur* à un cercle, suivant qu'il est intérieur ou extérieur à la sphère qui a même centre que le cercle et qui passe par ce cercle. On appellera *sphère polaire* des points a et b la sphère qui a pour centre le milieu de ces points et qui passe par eux. On dira qu'un point x est entre a et b, s'il appartient à la droite ab et s'il est intérieur à la sphère polaire de a et b. Enfin, on

1. Voici en deux mots cette démonstration. Soient les plans p et q qui ont en commun le point a. Soient r et s les droites perpendiculaires respectivement à p et q au point a (elles existent, et sont distinctes). Soit t la droite perpendiculaire aux deux droites r et s au point a (elle existe, et est déterminée). Cette droite appartient à la fois au plan p, comme perpendiculaire à r, et au plan q, comme perpendiculaire à s.

appellera *segment ab* l'ensemble des points situés entre *a* et *b*, en y joignant les points *a* et *b* (appelés *extrémités* du segment). On retrouve ainsi, par des définitions purement logiques et nominales, la notion fondamentale de la Géométrie descriptive, à savoir celle de *segment rectiligne*.

Il faut y joindre trois postulats relatifs à la situation :

« XVII. *a*, *b*, *c*, *d* étant 4 points collinéaires distincts, le point *d* ne peut se trouver sur un seul des segments *ab*, *ac*, *bc*. » C'est-à-dire que, ou bien il ne se trouve sur aucun d'eux, ou bien il se trouve sur deux au moins d'entre eux.

« XVIII. *a*, *b*, *c* étant 3 points collinéaires, si *c* est entre *a* et *b*, aucun point ne peut être à la fois entre *a* et *c* et entre *b* et *c*. » Autrement dit, les segments *ac* et *bc* n'ont aucun point commun. Il en résulte que le point *d* (dans le postulat XVII) ne peut se trouver que sur deux des trois segments *ab*, *ac*, *bc*. On démontre que, si *c* est entre *a* et *b*, *a* ne peut être entre *b* et *c*, ni *b* entre *a* et *c*. Cette propriété détermine l'ordre linéaire des points de la droite. On prouve que, dans la même hypothèse, le segment *ab* contient les segments *ac* et *bc*, et qu'il en est entièrement composé. On peut alors démontrer que la sphère de centre *a* qui passe par *b*, et la sphère de centre *b* qui passe par *a* ont un point commun, c'est-à-dire qu'il existe un triangle équilatéral de côté *ab*, ce qui est la première (!) proposition des *Éléments* d'Euclide, dont la démonstration est, nous l'avons dit, tout à fait insuffisante.

« XIX. *a*, *b*, *c* étant 3 points non collinéaires, toute droite du plan *abc* qui rencontre le segment *ab* doit rencontrer aussi le segment *ac* ou le segment *bc*, si elle ne passe par aucun des points *a*, *b*, *c* [1]. » De ce postulat il résulte que, dans la même hypothèse, si a' est entre *b* et *c*, b' entre *c* et *a*, et c' entre *a* et *b*, les points a', b', c' ne peuvent être collinéaires.

On peut ici définir les prolongements d'un segment, la demi-

1. Comme le remarque M. Pieri, on peut confondre ce postulat avec le postulat XVII dans l'énoncé un peu vague : « *a*, *b*, *c* étant 3 points distincts, une droite de leur plan ne peut rencontrer un seul des 3 segments *ab*, *ac*, *bc*. »

droite, le demi-plan, l'angle, suivant la méthode de M. PEANO; puis l'inégalité de deux segments, comme suit : « Dire que le segment *ab* est plus petit que le segment *cd*, c'est dire qu'il existe un mouvement qui transforme *a* en *c* et *b* en un point situé entre *c* et *d*. » On prouve que, si deux segments quelconques ne sont pas congruents, l'un d'eux est nécessairement plus petit que l'autre. On définit d'une manière analogue l'inégalité des angles. On peut alors démontrer les théorèmes proprement métriques qui tiennent tant de place, et une place trop prématurée, chez Euclide et ses imitateurs; par exemple : « La perpendiculaire est plus petite que toute oblique issue du même point » (théorème qui se déduit des 18 premiers postulats).

On définit le *triangle abc* comme la figure formée par tous les segments qui joignent le point *a* à un point du segment *bc*. On démontre que la figure ainsi déterminée est identique à celles que déterminent le point *b* et le segment *ac*, ou le point *c* et le segment *ab*; et encore, qu'elle est identique à chacune des figures communes à deux quelconques des 3 angles *bac*, *cba*, *acb*[1]. On peut alors démontrer les *trois cas d'égalité des triangles*; le 3ᵉ cas (3 côtés égaux) résulte d'ailleurs immédiatement d'un théorème qui repose sur les 16 premiers postulats. On démontre aussi que tout angle extérieur d'un triangle est plus grand que chacun des angles intérieurs non adjacents.

On définit enfin la *somme* de deux segments, et l'on peut alors démontrer presque tous les théorèmes des premiers livres d'Euclide qui ne dépendent pas du postulat des parallèles. Par exemple : « Dans un triangle isoscèle, les angles à la base sont égaux. » — « Si dans un triangle deux angles sont inégaux, au plus grand angle est opposé le plus grand côté, et réciproquement. » — « Chaque côté d'un triangle est plus petit que la somme des deux autres. » — « Si d'un point extérieur à une droite on mène la perpendiculaire et plusieurs

1. Cf. p. 151, note 2, et 164. Il faut remarquer qu'en Géométrie métrique les angles sont des *demi-angles*, c'est-à-dire des portions de plan comprises entre deux demi-droites (sous réserve de la note 3 de la page 202).

obliques à cette droite, la plus grande oblique est celle qui s'éloigne le plus du pied de la perpendiculaire, et réciproquement. » — « Si deux triangles ont deux côtés égaux chacun à chacun, et les angles compris inégaux, au plus grand angle correspondra le plus grand côté; et réciproquement. » Ces exemples suffisent à montrer que les postulats précédents permettent d'établir logiquement toutes les relations de grandeur qui forment l'objet essentiel de la Géométrie *métrique*.

Toutefois, ils ne suffisent pas à démontrer ce théorème capital : « Il existe un triangle dont les côtés sont respectivement égaux à 3 segments donnés, dont chacun est plus petit que la somme des deux autres [1] », ou, ce qui revient au même : « Deux cercles d'un même plan se coupent, quand la distance de leurs centres est plus petite que la somme de leurs rayons. » Et, en effet, ce théorème suppose un dernier postulat, l'*axiome de continuité*; il suffit d'ailleurs de postuler la continuité du segment de droite, comme suit :

« XX. Si k est un ensemble de points contenu dans le segment ab, il existe dans ce segment un point x tel qu'aucun point k n'est entre x et b, et que, pour tout point y situé entre a et x, il y a un point k situé entre y et x ou coïncidant avec x [2]. »

De ce postulat on peut déduire, comme on sait, l'axiome d'Archimède, qui est le fondement de la mesure des grandeurs. Alors, mais alors seulement, on peut affirmer que les segments sont des grandeurs mesurables; puis, une fois qu'on aura étendu ces axiomes aux angles, que les angles sont des grandeurs mesurables [3]. Seulement la Géométrie métrique fait

1. Il est à peine besoin de dire que la démonstration qu'en donnent EUCLIDE et ses successeurs est insuffisante.

2. C'est le même postulat que celui de la Géométrie descriptive dans le système de M. PEANO (voir p. 167).

3. Les angles doivent être conçus, non comme des portions de plans (ensembles de points), mais comme des portions de faisceaux (ensembles de rayons). C'est ce que M. RUSSELL prouve par des considérations ingénieuses, *op. cit.*, § 402. L'angle est dans le faisceau de rayons l'analogue exact du segment sur une droite. M. ENRIQUES distingue de même la *région angulaire*, portion de plan, et l'*angle*, portion de faisceau (*Elementi*

cesser l'analogie parfaite qui existe, en Géométrie projective, entre les segments et les angles. Entre les points d'une droite et les rayons d'un faisceau (mis en relation perspective) il y a, au point de vue projectif, une corrélation absolue : les deux figures sont des suites fermées; les segments de la droite et les angles (qui sont des « segments » du faisceau) se correspondent entièrement. Il n'en est plus de même lorsqu'on définit *métriquement* les segments et les angles : les angles ont un maximum, tandis que les segments forment un ensemble de grandeurs illimité. Cela provient de ce fait que, au point de vue métrique, les angles ont une grandeur absolue par rapport à une unité naturelle qui est, soit l'angle droit, soit le demi-tour (2 angles droits), soit le tour complet (4 angles droits), tandis qu'il n'y a rien d'analogue pour les segments. Il est vrai que les angles, eux aussi, deviennent des grandeurs illimitées (et même dans deux sens opposés) quand on admet (comme en trigonométrie) des angles supérieurs à un tour; mais les angles qui diffèrent d'un nombre entier de tours sont géométriquement indiscernables, et cela introduit dans la suite illimitée de ces grandeurs une périodicité qui manque à la suite des grandeurs linéaires. Dans tous les cas, il n'y a plus correspondance projective entre les segments et les angles (à un angle fini correspond un segment infini), et cela explique les paradoxes de la Géométrie métrique relatifs à l'infini. C'est là, d'ailleurs, l'origine de la discordance que nous avons constatée entre la Géométrie descriptive et la Géométrie projective, et que la création des éléments idéaux a eu pour but de supprimer.

Cette discordance entre les segments et les angles n'a pas lieu, toutefois, dans la Géométrie métrique de l'espace elliptique (ou riemannien), car dans cet espace (qui correspond, on l'a vu, parfaitement à l'espace projectif) la droite est une

di Geometria, nos 66-72, Bologna, 1903). Quant à la définition classique : « Un angle est la figure formée par deux demi-droites issues d'un même point », elle est mauvaise, car elle ne définit pas l'angle comme grandeur; elle ne permet pas de concevoir l'inégalité ni la somme de deux angles.

ligne fermée, et d'une longueur finie; la distance de deux points a donc un maximum (la moitié de la longueur de la droite entière).

Comme la Géométrie projective et la Géométrie descriptive, la Géométrie métrique peut se ramener à une forme purement logique si l'on transforme les postulats en une définition de l'espace métrique : Un espace métrique (euclidien ou non-euclidien) sera un ensemble qui jouira de telles et telles propriétés (énoncées dans les postulats). La Géométrie métrique, ou plutôt, chacune des Géométries métriques, prend alors la forme d'une vaste implication : *Si* tel ensemble jouit des propriétés fondamentales énoncées dans les postulats, il vérifiera tous les théorèmes de la Géométrie correspondante. La Géométrie, ou plutôt, les Géométries ne reposent plus sur des propositions premières, indémontrables; elles n'ont plus d'*axiomes propres*, en dehors des *axiomes communs* de la Logique même.

Mais, dira-t-on peut-être, n'est-ce pas par un détour artificiel, par un subterfuge logique, qu'on transforme les postulats en définitions? A cela on répondra que cette transformation est légitime et même nécessaire. Elle est légitime, car, tant qu'on fait de la Géométrie pure, on spécule sur des espaces idéaux dont on n'affirme nullement l'existence réelle; on peut donc, on doit même dépouiller les postulats de leur caractère catégorique, de leur « valeur de vérité », pour les réduire à de simples hypothèses problématiquement posées. Elle est nécessaire, car, pour raisonner sur un espace, il faut le définir : et l'on ne peut le définir qu'en énumérant ses propriétés caractéristiques, celles dont toutes les autres dérivent logiquement. On ne pourrait critiquer la définition de tel ou tel espace que pour deux raisons : ou bien parce qu'elle serait *insuffisante*, c'est-à-dire ne déterminerait pas un espace, mais plusieurs espaces (qualitativement différents[1]), et alors il faudrait lui

1. Car si plusieurs espaces concordent dans toutes leurs propriétés, ils sont indiscernables, ou plutôt, au point de vue logique, ils ne font qu'un.

adjoindre d'autres hypothèses ou conditions, c'est-à-dire d'autres postulats, pour la compléter; ou bien parce qu'elle serait *surabondante*, c'est-à-dire contiendrait certaines conditions superflues qui sont les conséquences logiques des autres; or, par cela même qu'on prouverait que ces conditions sont superflues, on les démontrerait comme théorèmes, et on les supprimerait comme postulats [1]. La définition d'un espace (comme de n'importe quel objet) est donc l'ensemble des conditions *nécessaires* et *suffisantes* pour déterminer toutes ses propriétés. Ou bien un postulat appartient à cet ensemble de conditions, et alors ce n'est plus un *postulat*, mais une partie intégrante de la définition; ou bien il n'en fait pas partie, et alors c'est un théorème qui *peut* (et par suite *doit*) être démontré (sans quoi la définition ne serait pas complète). Il n'y a donc pas de place, dans une Géométrie logiquement construite, pour un postulat quelconque [2]. En résumé, *les axiomes de la Géométrie ne sont que des définitions déguisées* [3], ou plutôt des parties de définition. Mais alors (il importe de remarquer cette conséquence nécessaire de la conception que nous exposons ici), la Géométrie ne peut pas être une science autonome ayant ses principes spéciaux et reposant sur des « juge-

1. C'est pourquoi il est utile de démontrer de chaque système de postulats qu'il est *suffisant* et *irréductible*; c'est ce qui a été fait pour certains de ceux que nous venons d'exposer.

2. Le fameux « postulatum d'Euclide » est simplement un complément de la définition de la droite euclidienne, ou de l'espace euclidien. Il ne doit sa célébrité qu'à la place extraordinaire qu'on lui a longtemps assignée dans les manuels. Mais, en réalité, ce n'est pas un postulat exceptionnel et unique, ce n'est qu'un des nombreux postulats ou axiomes de la Géométrie, et, de même qu'on a construit les Géométries non-euclidiennes sur sa négation, on peut « s'amuser » à nier tel ou tel autre postulat, et à construire des Géométries non-archimédiennes, non-arguésiennes, non-pascaliennes, etc. (Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*. Cf. le compte rendu de cet ouvrage par M. Poincaré, ap. *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. XXVI, sept. 1902). Au point de vue pédagogique, la place privilégiée accordée au postulatum d'Euclide (alors surtout qu'on passe sous silence les autres postulats) est très fâcheuse : elle fait croire à une « imperfection » singulière de la théorie, et est sans doute responsable en grande partie des innombrables essais de démonstration du fameux postulatum.

3. H. Poincaré, *La Science et l'Hypothèse*, chap. III, fin (p. 66 de l'éd. française).

ments synthétiques *a priori* »; c'est une série de déductions formelles suspendues à une définition, et qui en déroulent à l'infini les conséquences logiques. En un mot, la Géométrie n'est plus qu'une simple promotion de la Logique.

De même que la Géométrie n'a plus de propositions premières, elle n'a plus de notions premières qui lui soient propres. En effet, dans tous les systèmes que nous avons exposés plus haut, les notions premières se réduisent à deux : un concept de classe qu'on nomme *point*; et une notion de relation (ordre, congruence, mouvement), qui se déguise parfois, quand l'analyse n'est pas poussée à bout, en un concept de classe (droite, segment, vecteur). Or, d'un côté, la notion de *point* n'intervient nullement dans la structure logique de la Géométrie : les points ne sont rien de plus que les éléments de certains ensembles, ou mieux, les termes de certaines relations; ce sont des objets quelconques, de nature inconnue ou indéterminée, dont on ne sait qu'une chose : c'est qu'ils sont les supports de certaines relations. Ou plutôt, on n'en sait rien, même pas cela; on sait seulement que, *si* des objets quelconques (qu'on les appelle *points* ou autrement) supportent entre eux certaines relations fondamentales (énoncées dans les axiomes), ils vérifieront tous les théorèmes qui en découlent logiquement. Ainsi la Géométrie pure, qui n'est qu'un système d'implications, n'affirme rien touchant les points; rigoureusement parlant, elle ne les connaît pas, et elle n'en a pas besoin.

D'un autre côté, les relations qui constituent l'autre donnée primordiale des divers systèmes de Géométrie ne sont plus indéfinissables : nous avons vu comment la Logique des relations permet de les définir au moyen de leurs propriétés formelles. Il semble paradoxal de ramener la Géométrie à n'être qu'une application de la Logique des relations; et pourtant, tout le monde sait et reconnaît que la Géométrie, comme la Mathématique en général, est une science « abstraite », en ce sens qu'elle fait abstraction de la nature intrinsèque des objets pour ne considérer que leurs relations; de sorte que, si deux ensembles d'objets (de nature toute différente) vérifient les

mêmes relations, ils seront soumis à la même théorie mathématique (c'est là un fait bien connu, dont la Physique mathématique offre des exemples nombreux et frappants). La thèse épistémologique que nous soutenons ici n'est que la systématisation et la justification de cette remarque banale. Mais, ici encore, il faut bien se rendre compte de la portée de ce lieu commun : si la Mathématique est une science « abstraite », ce n'est pas, comme le croient les empiristes et positivistes, parce qu'elle fait abstraction de la plupart des propriétés des objets d'expérience; c'est parce qu'elle n'est plus à aucun degré une science d'*objets*, mais une science *formelle* et *pure*, qui ne considère que la forme des objets et leurs relations. C'est ce qui explique que les vérités mathématiques soient universelles et nécessaires *a priori* : elles sont objectives, non parce qu'elles naissent de l'étude des objets, mais parce que, ne portant sur aucun objet en particulier, elles portent sur tous les objets possibles. Mais alors, il est impossible de méconnaître leur analogie avec les lois logiques, dont elles possèdent tous les caractères, et dont elles sont en effet des conséquences. Si la Mathématique est *formelle* comme la Logique, c'est parce qu'elle est le prolongement de la Logique.

Qu'est-ce donc, en définitive, que la Géométrie, et comment doit-on la définir pour la distinguer des autres branches de la Mathématique ou de la Logique? C'est « l'étude des suites à plusieurs dimensions [1] » : « des suites », c'est-à-dire des ensembles ordonnés; « à plusieurs dimensions », car l'Arithmétique, par exemple, étudie une suite à une dimension, la suite naturelle des nombres [2]. Cette définition ne contredit nullement le caractère de science logique que nous venons d'attribuer à la Géométrie : car, d'une part, dans l'étude des ensembles, en général, on ne considère point leurs éléments, mais seule-

1. Russell, *op. cit.*, § 352, p. 372.

2. A ce titre, l'Analyse, en tant que fondée sur la notion de nombre complexe, rentre dans la Géométrie. Il n'y a là rien de choquant : ce n'est pas l'Analyse qui devient tributaire de la Géométrie; c'est au contraire la Géométrie qui est une extension de l'Analyse, suivant la conception qui règne à présent chez les mathématiciens.

ment leurs relations ; et, d'autre part, un ensemble *ordonné* ne peut être défini, comme tout ordre, qu'au moyen de certaines relations. On pourrait donc aussi bien définir la Géométrie comme l'étude de certains *ordres* (les ordres à multiple entrée) ou de certaines *relations* (les relations qui définissent les ordres susdits). L'espace, en tant qu'objet de la Géométrie pure, n'est pas autre chose que cela : c'est un ensemble ordonné (abstraction faite de ses éléments, qu'on les appelle *points* ou autrement); ou, en termes plus « logiques », c'est un ordre, c'est-à-dire un système de relations.

Encore une fois, ces définitions paradoxales ne font que formuler avec précision la conception de la Géométrie qui est aujourd'hui courante chez les mathématiciens. Pour le montrer, il suffit de rappeler que, selon M. Poincaré et beaucoup d'autres, la Géométrie, ou plus exactement, chaque Géométrie, est l'étude d'un groupe. Or on sait ce que c'est qu'un groupe : c'est un ensemble de transformations telles, que le « produit relatif » de deux transformations est une transformation de l'ensemble [1]. Et qu'est-ce qu'une transformation? C'est une correspondance univoque et réciproque entre un ensemble (l'espace par exemple) et le même ensemble; autrement dit, une relation biuniforme dont le domaine et le codomaine coïncident. Ainsi la formule que nous venons de citer ne fait qu'exprimer, en termes mathématiques, la même conception que la définition de M. Russell exprime en termes de Logique. D'ailleurs, la théorie des groupes, qui a pris dans les Mathématiques modernes une si grande importance, est une branche de la science de l'ordre, et par suite de la Logique des relations. Et s'il y a quelqu'un qui ne puisse pas la considérer comme une théorie mathématique, ce sont justement les philosophes qui persistent à définir les mathématiques, suivant la conception traditionnelle et surannée, comme les sciences du nombre et de la quantité.

Il va sans dire que nous ne parlons que de la Géométrie

1. Pour une définition plus exacte et logique du groupe, voir Note II.

pure, de la « science de toutes les espèces possibles d'espaces » (Kant), et non de la Géométrie *réelle* ou *appliquée*, qui a pour objet l'espace actuel, et qui est une science expérimentale. Une Géométrie pure est une implication de la forme : « Si A est vrai, B est vrai » ; la Géométrie appliquée dit : « A est vrai, donc B est vrai » ; elle affirme à la fois A et B de l'espace actuel, objectif, tandis que la Géométrie pure n'affirme que la connexion logique, idéale, de A et de B. Or, entre toutes les Géométries logiquement possibles que l'on peut constituer théoriquement, l'expérience seule peut nous permettre de choisir celle que nous appliquerons au monde « réel », c'est-à-dire au monde de notre expérience. Cela ne veut pas dire que, comme le croient l'empirisme et le réalisme naïf, il y ait hors de nous un espace tout fait et réalisé que nous n'ayons qu'à percevoir, mais que le monde que nous percevons se prête plutôt à tel moule spatial qu'à tel autre. Cela ne veut pas dire non plus que l'on puisse vérifier par une expérience cruciale tel ou tel postulat isolé (par exemple, le postulatum d'Euclide); car, comme on l'a fait remarquer, une telle vérification supposerait tous les autres postulats vérifiés, ce qui forme une sorte de cercle. Mais il ne faut pas non plus soutenir, comme font les agnosticistes contemporains, que toute vérification expérimentale de la Géométrie constitue un cercle vicieux ; car, si l'on ne peut pas vérifier chaque postulat séparément, on peut vérifier l'ensemble total des postulats. Seulement une telle vérification ne peut plus être directe et péremptoire : elle sera du genre de celles qui vérifient une hypothèse par ses conséquences, et par suite elle ne sera jamais que probable. Mais c'est là le cas de la plupart des hypothèses physiques ; et cela ne fait que rapprocher la Géométrie des sciences expérimentales. A ce point de vue, les postulats ne sont plus de simples « hypothèses » dans une implication, ils deviennent des propositions assertoriques, des vérités d'expérience. Il n'y a, on le voit, aucune inconséquence à considérer la Géométrie *pure* comme une science *a priori*, et la Géométrie *appliquée* comme une science empi-

rique; car il ne s'agit pas de la même Géométrie, ou plutôt, si c'est la même Géométrie, la modalité des propositions y est toute différente.

Une chose montre bien la différence de ces deux Géométries, ou de ces deux modes de considérer la Géométrie : la Géométrie pure, avons-nous dit, ignore les points et n'a pas à les connaître; ce sont simplement les termes indéterminés des relations qu'elle étudie. Au contraire, la Géométrie appliquée a besoin de déterminer, dans l'espace « réel » ou objectif, les éléments qu'on devra appeler des points, et par suite, ce qu'on devra considérer comme des droites, comme des plans, etc.; car c'est à cette condition que les propositions géométriques prennent un sens « réel » et deviennent susceptibles de vérification. Il faut donner un contenu objectif aux formes vides de la Géométrie pure, et pour cela on doit recourir à l'intuition. L'intuition est complètement exclue de la Géométrie pure, qui n'est qu'un système logique; mais elle règne dans la Géométrie appliquée, car elle est indispensable pour donner un sens et un support aux notions premières, et pour vérifier les propositions premières (postulats) dont toutes les autres découlent. On peut, si l'on veut, refuser le nom de *Géométrie* à la Géométrie pure, et dire que c'est simplement une branche de l'Analyse; on ne fera ainsi que confirmer notre thèse, qui fait de la Géométrie pure une application de la Logique; et l'on pourra alors faire reposer la Géométrie (appliquée) sur l'intuition. Mais on ne supprime pas par là la Géométrie pure, et l'on n'en diminue pas l'utilité pour la Géométrie appliquée : la Géométrie pure permettra toujours de réaliser (suivant les idées de Mach) une « économie » d'expérience, en enseignant quel est le nombre minimum de postulats qu'il faut vérifier pour être sûr de la vérité de toutes les autres propositions; sans la Géométrie pure, la Géométrie appliquée ne serait qu'une science absolument empirique, dont chaque proposition devrait être vérifiée expérimentalement : ce ne serait même plus une *science*, car dans les sciences les plus expérimentales la déduction joue un rôle pour rattacher entre elles

les lois trouvées et en tirer les conséquences nécessaires. Une science n'est pas une compilation de lois ou de « recettes », c'est un *système* de vérités, dont la Logique est le ciment. La Géométrie pure est la partie *logique* de la Géométrie appliquée, c'est-à-dire ce que, depuis Euclide, on a coutume d'appeler la Géométrie (théorique). Seulement, elle a toujours été mêlée, dans la tradition, d'éléments intuitifs, dont elle tendait à se purifier progressivement; aujourd'hui, la distinction est nette et complète entre la part de la Logique et celle de l'intuition.

Il nous reste à préciser les rapports de la Géométrie pure avec l'Arithmétique. Nous venons de rappeler l'opinion, aujourd'hui très répandue, selon laquelle la Géométrie serait une branche de l'Analyse; et, d'autre part, on sait que toute l'Analyse a été reconstruite avec la notion de nombre entier, et n'est plus qu'un prolongement de l'Arithmétique. S'ensuit-il que la Géométrie ne soit, elle aussi, qu'une extension de l'Arithmétique, qu'elle n'ait pas d'autre contenu que l'idée de nombre, et que l'on puisse construire l'espace avec des nombres, comme beaucoup de mathématiciens le croient, à la suite de Riemann, en parlant par exemple d'*espace arithmétique*? C'est là une erreur : les espaces qu'étudient les diverses Géométries sont des ensembles, dont les éléments, appelés *points*, sont en réalité indéterminés et indifférents; ce ne sont pas nécessairement des ensembles de *nombres*. Et la prétention de réduire toute la Mathématique, y compris la Géométrie, à ce seul objet, le nombre, est vaine et même illogique; car l'idée d'ensemble est antérieure à celle de nombre, comme on l'a vu, puisqu'elle sert à définir celle-ci. S'il y a une idée première et fondamentale en Mathématique, ce n'est donc pas l'idée de nombre, mais bien celle d'ensemble.

Néanmoins, l'erreur précédente a, comme toute erreur, une explication, qui n'est pas une justification, et qu'il est intéressant de signaler. Elle vient sans doute de ce que, toutes les fois qu'on veut démontrer l'existence (logique) d'un espace défini par un certain système de postulats, on n'a pas d'autre

moyen que de construire un ensemble de nombres qui vérifie tous ces postulats (ces nombres étant pris parmi les nombres réels ou complexes, dont on admet l'existence logique comme préalablement établie). De même, lorsqu'on veut démontrer qu'un système de postulats est irréductible, c'est encore à des ensembles de nombres convenablement construits qu'on fait appel, en montrant qu'ils vérifient tous les postulats, sauf un. Cette méthode est couramment employée, non seulement par les logisticiens dont nous avons cité les mémoires dans ce Chapitre, mais par les mathématiciens les plus étrangers à la Logistique, comme M. Hilbert[1]. Par là non seulement les lecteurs, mais parfois les auteurs eux-mêmes sont amenés à croire que l'on construit l'espace avec des nombres, en vertu de la tendance générale des mathématiciens (remarquée par M. Russell) à identifier purement et simplement les ensembles qui possèdent les mêmes propriétés formelles. Mais cette illusion a été parfaitement démêlée par un auteur (également étranger à la Logistique) dans la remarque suivante : « C'est parce qu'on peut démontrer la compatibilité des conditions énoncées dans les définitions... des premiers termes de la Géométrie à l'aide du système des nombres entiers, qu'il est légitime de dire que la Géométrie peut être tout entière construite à partir de l'idée du nombre ». Cette remarque, tout en accordant une « légitimité » excessive à ce qui n'est qu'une façon de parler, montre bien ce qu'il faut entendre par l' « arithmétisation des mathématiques », et en limite singulièrement la portée. Il ne s'agit pas, à proprement parler, de construire l'espace avec des nombres (*ex pumice aquam!*), mais seulement de construire avec des nombres un ensemble qui ait toutes les propriétés fondamentales de l'espace considéré, afin de démontrer l' « existence » de cet espace sans faire appel à l'intuition. Entre les divers espaces qu'étudie la Géométrie et les ensembles de nombres qu'on leur substitue, il y a analogie

1. *Grundlagen der Geometrie* (1899).
2. Lebesgue, *Leçons sur l'Intégration*, chap. vii, § 1, note (Gauthier-Villars, 1904).

formelle, et non identité; mais cela suffit pour qu'on puisse démontrer l'existence (logique) de ces espaces sans aucun postulat intuitif ou expérimental, et par suite faire rentrer les diverses Géométries dans la Mathématique pure, comme dépendant uniquement de la Logique.

CONCLUSION

On comprend mieux à présent la définition dans laquelle M. Russell a résumé la conception moderne de la Mathématique pure. Pour achever de l'expliquer et de la justifier, il convient de la comparer à quelques autres définitions qui en ont été proposées [1]. Il ne s'agit plus, bien entendu, de la définition traditionnelle de la Mathématique comme science de la quantité, qui est unanimement abandonnée et définitivement condamnée. Mais, étant donnés l'extrême généralité de la Mathématique moderne, et le caractère de science logique et pure qu'elle prend de plus en plus, on peut se demander si l'on doit la définir par sa matière ou par sa forme; autrement dit, si elle a encore un objet spécial et déterminé, ou si elle est moins une science qu'une méthode, et une méthode applicable à toutes sortes d'objets.

Cette dernière opinion a été hardiment soutenue par un des savants qui ont le plus contribué à élargir l'horizon de la Mathématique, Benjamin Peirce, qui écrivait dès 1870 : « La Mathématique est la science qui tire des conclusions nécessaires [2]. » Selon cet auteur, la Mathématique serait essentiellement la méthode déductive et démonstrative, et comprendrait toutes les connaissances « dogmatiques », c'est-à-dire ration-

1. Nous nous inspirons ici de la conférence de M. Maxime Bôcher au Congrès de Saint-Louis (septembre 1904) : *The fundamental conceptions and methods of mathematics*, ap. *Bulletin of the American Mathematical Society*, t. XI, p. 115-135 (déc. 1904).

2. « Mathematics is the science which draws necessary conclusions »; première phrase de *Linear associative Algebra*, mémoire lu à l'Académie nationale des Sciences de Washington en 1870; publié ap. *American Journal of Mathematics*, t. IV, p. 97-229 (1881).

nelles. Elle n'enveloppe pas toutes les sciences, mais elle les régit et les domine toutes : ce n'est pas elle qui découvre les lois de la nature, mais c'est elle qui en tire toutes les conséquences logiques. C'est à tort qu'on englobe dans la Mathétique certaines sciences déductives, comme la Géométrie et la Mécanique, qui sont (par leurs principes) des sciences physiques; car alors il faudrait y faire rentrer toutes les sciences qui emploient peu ou prou la déduction. Mais chacune des sciences physiques a sa méthode déductive, et par suite sa mathématique propre; et comme toute théorie mathématique prend naturellement la forme d'une algèbre, chaque science a *son* algèbre, son algorithme formel. C'est ainsi que B. PEIRCE fait rentrer dans la Mathématique même la Logique : c'est qu'il entend par là l'Algèbre de la Logique (de BOOLE), algèbre « qualitative » qu'il oppose à l'algèbre « quantitative » de l'Arithmétique. Mais c'est que BOOLE concevait encore la Logique à la manière d'Aristote, comme la Logique des concepts. Pour nous, qui concevons la Logique comme la science de tous les raisonnements *formellement* nécessaires, elle est coextensive et au fond identique à la Mathématique telle que la définissait B. PEIRCE. Et c'est la raison pour laquelle nous n'admettons pas sa définition. Elle est manifestement trop générale, car elle fait rentrer dans la Mathématique toute espèce de raisonnements, même ceux qui portent sur des matières tout empiriques, comme les arguments des avocats. Si large que soit la conception moderne de la Mathématique, elle ne permet pas de dire qu'un avocat « fait des mathématiques » lorsqu'il invoque un alibi ou discute l'application d'une loi à un cas particulier; au contraire tout le monde conviendra qu'il « fait de la Logique ». La Logique est donc plus générale que la Mathématique; elle seule est purement formelle et par suite universelle. Il semble donc que la Mathématique ne puisse se définir par sa forme seule, et que, si sa *méthode* se confond avec la Logique elle-même, elle s'applique à une certaine classe des objets qui la spécialise et la distingue de toutes les autres sciences déductives.

Mais quel peut être l'objet des mathématiques? Il est reconnu aujourd'hui que les théories mathématiques sont indépendantes de leur contenu objectif, et sont indifféremment applicables à toute espèce d'objets, pourvu qu'ils vérifient les relations formelles énoncées dans les postulats[1]. C'est ce qui fait la valeur *abstraite* et *formelle* de la Mathématique, et lui donne un caractère si analogue à celui de la Logique. Mais comment définir la Mathématique par son objet, si elle fait précisément abstraction de la nature de ses objets? Néanmoins, KEMPE[2] a cru trouver des caractères (formels) communs à tous les objets des sciences mathématiques : ce sont toujours des classes d'*individus* soumis à certaines *relations* et à certaines *opérations* (ou combinaisons). Et comme les opérations se ramènent à des relations, l'objet d'une science mathématique se réduit en définitive à une classe d'individus associée à une classe de relations. Une science ou théorie est mathématique, si toute la question est de savoir si tel ensemble d'objets vérifie telles relations. On remarquera que cette conception se rapproche beaucoup, à certains égards, de celle de M. RUSSELL, qui fait reposer la Mathématique sur la Logique des relations; et, d'autre part, elle se justifie par l'importance qu'ont prise, dans les fondements des mathématiques, la théorie des ensembles et la théorie des groupes. Toutefois, elle est manifestement incomplète, car elle ne dit rien de la méthode par laquelle on doit étudier les objets et les relations en question. Or cette méthode peut être empirique aussi bien que déductive : toute science sociale, toute administration politique, judiciaire, etc., consiste à reconnaître (ou à établir) certaines relations entre des individus d'une certaine classe; ce ne sont pourtant pas des sciences mathématiques. Pour qu'il y ait science mathématique, il faut que, certaines relations étant

1. Encore faut-il remarquer qu'au point de vue de la Logique pure, une théorie déductive s'applique à toute espèce d'objets, en tant qu'elle constitue une implication, car elle est encore vérifiée, si l'objet ne vérifie pas les postulats qui forment l'hypothèse de l'implication.

2. *Nature*, t. 43, p. 156 (1890); *Proceedings of the London Mathematical Society*, t. 26, p. 5 (1894).

données, on puisse en déduire d'autres; il faut donc faire intervenir la considération de la méthode déductive. On ne peut pas, par conséquent, définir la Mathématique uniquement par son objet, si générale et si formelle que soit la définition de cet objet lui-même.

Il ne reste donc plus qu'un moyen : c'est de définir la Mathématique à la fois par sa méthode et par son objet; et c'est précisément ce qu'a fait M. Russell. La méthode mathématique est la déduction, tout le monde est d'accord là-dessus; mais il faut entendre par là la déduction purement logique, fondée sur les principes qu'énumère et que formule la Logistique. Sans doute, toute déduction suppose des propositions premières qu'on doit postuler, et qu'on ne peut pas déduire; et ces postulats peuvent être empruntés à n'importe quelle source de connaissance, empirique ou *a priori*. Mais ce qui distingue la Mathématique pure de toutes les autres théories déductives, c'est qu'elle n'a pas, à proprement parler, besoin de postulats : nous avons montré, d'après M. Russell, que les différentes théories mathématiques ne reposent pas sur des principes ou « axiomes » propres, mais uniquement sur des définitions [1]. Quant à ces définitions, qui déterminent l'objet de chaque théorie, elles sont purement logiques, c'est-à-dire qu'elles ne contiennent pas d'autres constantes que les constantes logiques; ce qui distingue les objets des mathématiques des objets plus ou moins empiriques des autres sciences déductives, c'est qu'ils sont définis en fonction des seules constantes logiques. Ainsi la Mathématique pure se trouve définie à la fois par sa forme et par sa matière : par sa forme, qui est un ensemble d'implications conformes aux principes de la Logique : par sa matière, qui est un ensemble de définitions ne contenant que des termes de Logique. On comprend donc qu'elle soit, au point de vue de la forme, identique à la Logique; et que, au

1. M. Bôcher (*loc. cit.*) résume la théorie de M. Russell en disant que la mathématique pure consiste en déductions « by logical principles from logical principles ». Cette formule est ingénieuse et frappante; mais elle serait peut-être plus juste si l'on disait : « by logical principles from logical definitions ».

point de vue de la matière, elle ne soit qu'un domaine spécial dans le champ d'application de la Logique. Par là s'explique qu'elle ait le caractère abstrait et formel de la Logique, tout en restant distincte de celle-ci et subordonnée à elle. Par là enfin se trouvent justifiées les théories philosophiques qui attribuent aux concepts et aux vérités mathématiques une valeur universelle et nécessaire, donc *a priori*, car, si notre thèse est juste, cette valeur est égale à celle des lois de la Logique même.

NOTE I

SUR LA THÉORIE DES ENSEMBLES

On sait que, depuis une vingtaine d'années, la théorie des ensembles a pris une place considérable dans la science mathématique, et apparaît de plus en plus comme la base indispensable de l'Analyse : elle a d'ailleurs été inventée tout exprès pour préciser, éclaircir et généraliser les notions fondamentales du calcul intégral et de la théorie des fonctions, notions qui (comme celle du continu par exemple) n'avaient pas encore été logiquement analysées, qu'on acceptait encore dans le sens vulgaire et naïf que leur donnaient l'usage et la tradition, et que, pour cette raison, on attribuait à l'intuition. Si donc nous montrons que la théorie des ensembles est, par ses notions premières et par ses principes, une branche ou une application de la Logique, nous aurons beaucoup fait pour établir la thèse soutenue dans cet ouvrage.

On doit distinguer dans la théorie des ensembles plusieurs parties ou plusieurs étages[1]. Il y a d'abord ce qu'on peut appeler la théorie des ensembles « abstraits », qui considère des ensembles d'objets quelconques, de nature indéterminée, sous la seule condition que chacun de ces objets constitue un

1. Un exposé très élémentaire de la théorie des ensembles se trouve dans notre ouvrage *De l'Infini mathématique*, Note IV (1896). Ceux qui voudraient s'initier plus à fond à cette théorie et à ses applications mathématiques n'ont qu'à lire le très substantiel *Bericht über die Mengenlehre* de M. A. Schönflies, ap. *Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung*, VIII, 2 (Leipzig, Teubner, 1900).

individu reconnaissable; un ensemble, dit-on, est déterminé, si l'on a le moyen de décider, au sujet d'un objet (individuel) quelconque, s'il appartient ou n'appartient pas à l'ensemble considéré. On reconnaît déjà là les notions logiques d'*individu* et de *classe*, et la relation d'*appartenance* d'un individu à une classe (ε).

Entre les ensembles ainsi conçus on est amené à considérer une relation fondamentale : l'un peut être *contenu* dans l'autre, en être une *partie*; c'est la relation que nous désignons par $\supset$. Il peut même arriver que les deux ensembles soient mutuellement *contenus* l'un dans l'autre, et alors ils sont *identiques*; c'est ce que nous appelons l'égalité logique ($=$). On dit qu'un ensemble A est *partie intégrante*[1] d'un autre ensemble B, lorsqu'il y est contenu sans lui être identique : c'est-à-dire lorsque tout A est un B, mais tout B n'est pas un A. C'est ce que nous exprimons par les deux formules :

$$A \supset B \,.\, A -= B$$

ou :

$$A \supset B \,.\, B - \supset A.$$

Enfin on considère deux espèces de combinaisons entre deux ensembles A, B : l'un consiste dans leur *partie commune*, ou dans l'ensemble des éléments qui leur sont communs; on l'appelle leur *diviseur commun*, et on le représente par $\mathscr{D}$ (A, B). C'est ce que nous appelons leur *produit logique* $A \frown B$. L'autre consiste dans leur *réunion*[2], c'est-à-dire dans l'ensemble de tous les éléments qui appartiennent à l'un ou à l'autre : on l'appelle leur *plus petit commun multiple* et on le représente par $\mathscr{M}$ (A, B). C'est ce que nous appelons leur *somme logique* $A \smile B$. Dans le cas où les deux ensembles n'ont pas d'élément commun, on l'appelle leur *somme*, et on la représente par $A + B$. C'est revenir à l'addition disjonctive de Boole, que les progrès de la Logistique ont fait abandonner pour

1. « Echter Teil » (Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen*, p. 2 et 3).
2. *Vereinigungsmenge* (Schönflies, *loc. cit.*).

l'addition conjonctive. Lorsqu'on veut spécifier le cas de l'addition disjonctive, ou écrit simplement la condition :

$$A \frown B = \Lambda.$$

On est souvent amené à distinguer deux ensembles *complémentaires* l'un de l'autre, c'est-à-dire qui n'ont aucun élément commun, et dont la somme constitue un certain ensemble total U. Nous disons que de tels ensembles sont la *négation* l'un de l'autre, lorsque l'ensemble U est considéré comme l'univers du discours. Dans le cas contraire, on a :

$$A \frown B = \Lambda, \qquad A \smile B = U$$

On aurait en général :

$$U = A\,B \smile A - B \smile B - A$$

mais, puisque $A\,B = \Lambda$, il reste seulement :

$$U = A - B \smile B - A$$

On aurait de même :

$$A = A - B = U - B$$
$$B = B - A = U - A$$

c'est-à-dire que A et B sont pour ainsi dire la *négation* l'un de l'autre par rapport à (à l'intérieur de) l'ensemble U.

Enfin il arrive parfois qu'on ait à exprimer qu'un ensemble A est nul, c'est-à-dire ne contient aucun élément; et alors on voit des mathématiciens rigoureux écrire tout bonnement :

$$A = 0$$

ce qui est d'autant plus incommode qu'ils ont d'autres fois à exprimer que l'ensemble A (non nul) se réduit au point (nombre) appelé 0, et qu'ils écrivent alors, pour éviter l'équivoque :

$$A = (0)$$ [1].

En résumé, cette première partie, la plus élémentaire, de la théorie des ensembles coïncide exactement avec la Logique

1. Schönflies, *loc. cit.*, p. 60 et passim ; p. 98, et note 3.

des classes. Néanmoins, les mathématiciens qui l'ont traitée depuis 20 ans semblent ignorer que les concepts qu'ils définissent, et pour lesquels chacun d'eux invente des notations plus ou moins heureuses, ont été élaborés depuis 50 ans par des logiciens qui étaient (ou sont) pourtant aussi des mathématiciens (Boole, Schröder, Peano). Notre expérience personnelle nous permet d'affirmer que, chez quelques-uns, et non des moindres, cette ignorance est réelle, et, qui pis est, volontaire. Il est toujours fâcheux que deux classes de savants s'ignorent mutuellement et systématiquement; mais cela est encore bien plus regrettable, quand les uns et les autres s'occupent, non d'objets voisins ou connexes, mais des mêmes objets au fond.

Une autre partie de la théorie des ensembles consiste à étudier les ensembles au point de vue de leurs *puissances* et de leur *équivalence*. Deux ensembles ont *même puissance*, par définition, lorsqu'ils sont équivalents, c'est-à-dire lorsqu'on peut établir entre tous leurs éléments une correspondance univoque et réciproque. C'est ce que nous exprimons en disant qu'il y a entre eux une relation biuniforme. Quant à la notion de *puissance*, qui se trouve ainsi définie « par abstraction », elle n'est pas autre chose que la notion générale de *nombre cardinal*, dont nous avons discuté les diverses définitions. Si l'on admet celle à laquelle nous nous sommes arrêté, on définira explicitement la puissance, ou mieux, le nombre cardinal d'un ensemble, en disant qu'elle est la classe des ensembles qui lui sont équivalents. Et, en effet, il est évident que deux ensembles équivalents possèdent le même nombre cardinal, en vertu de cette définition.

L'égalité des puissances se ramène ainsi, comme toujours, à l'identité. Quant à leur inégalité, sa définition donne lieu à des difficultés spéciales que nous n'avons pas à examiner ici. Bornons-nous à rappeler qu'un ensemble A a une puissance *inférieure* à celle de l'ensemble B, si A est équivalent à une partie intégrante de B, et si B n'est équivalent à aucune partie intégrante de A. Comme nous savons exprimer en termes logiques l'*équivalence* et la notion de *partie intégrante*, nous

pouvons traduire en Logistique la définition précédente et en tirer toutes les conséquences logiques.

Ainsi la théorie des puissances d'ensembles n'est pas autre chose que la théorie des nombres cardinaux en général : c'est une Arithmétique générale, où l'on définit la *somme*, le *produit* et la *puissance*[1] des nombres cardinaux, finis ou infinis, sans distinction. Voici ces définitions.

1° Si α et β sont les nombres cardinaux de deux ensembles A et B sans élément commun, leur *somme* $(\alpha + \beta)$ est le nombre cardinal de l'ensemble somme de A et de B. Nous n'insistons pas sur cette définition : c'est exactement celle que nous avons énoncée ci-dessus, d'après M. Russell, et dont nous avons donné la formule logistique.

2° Soient deux ensembles A et B. Si l'on associe chaque élément a de l'un à chaque élément b de l'autre, on forme un ensemble de couples (a, b)[2]. Le nombre cardinal de cet ensemble est, par définition, le *produit* des nombres cardinaux α et β. Cette définition est également susceptible d'expression logistique : car un couple tel que (a, b) est en réalité une relation singulière, dont l'antécédent est un élément de A, et le conséquent un élément de B. Ces relations forment un ensemble, et par suite déterminent un nombre cardinal. C'est cet ensemble que M. Whitehead appelle *classe multiplicative*, dans la définition que nous avons indiquée précédemment (p. 53). Voici d'ailleurs comment on peut définir la classe multiplicative, non plus de deux ensembles, mais d'une classe k d'ensembles (en nombre fini ou infini) : Soit k une classe de classes exclusives et non nulles; considérons l'ensemble des relations uniformes R dont le domaine est k, et telles que uRx implique (pour toute classe u et pour tout individu x) que $x \varepsilon u$[3]; la classe multiplicative des k est l'ensemble

1. Le fait qu'on est obligé de parler des *puissances* des nombres cardinaux infinis doit faire proscrire pour ceux-ci le nom de *puissance*. Cette équivoque n'existe pas en allemand (*Potenz*, *Mächtigkeit*).

2. Ensemble que M. Schönflies appelle *Verbindungsmenge* des deux ensembles A et B.

3. Autrement dit, R est une correspondance uniforme établie entre

des *codomaines* de ces relations R[1]. On voit que cette définition peut être formulée uniquement au moyen de la Logique des relations.

3° Considérons enfin deux ensembles A et B (de nombres cardinaux α et β), et l'ensemble de toutes les lois suivant lesquelles on peut faire correspondre un A à chacun des B[2]. Le nombre cardinal de cet ensemble sera, par définition, la *puissance* β^e du nombre α, ou α^β. Or qu'est-ce qu'une loi en vertu de laquelle à chaque B correspond un A? C'est une relation *uniforme* entre tous les B et les A (en général, quelques A seulement). Le nombre de toutes les relations *différentes* de cette espèce est la puissance définie α^β. Ici encore, on conçoit aisément que cette définition puisse s'exprimer par la Logique des relations, puisqu'il n'y entre que des propriétés que l'on sait formuler logistiquement.

Les trois définitions précédentes s'appliquent aussi bien aux nombres finis qu'aux nombres infinis. C'est donc toute l'Arithmétique qui repose par là sur la Combinatoire, c'est-à-dire en définitive sur la Logique des relations[3].

Il y a une troisième partie de la théorie des ensembles où intervient l'idée d'ordre : c'est la théorie des ensembles ordonnés, des types d'ordre et des nombres ordinaux. Or nous savons que tout ordre est défini par une relation d'une certaine espèce. Deux ensembles ordonnés sont *semblables*, lorsqu'il existe entre leurs éléments une correspondance univoque et réciproque telle que, si dans l'un l'élément *a* précède l'élément *b* dans l'autre l'élément correspondant à *a* précède l'élément

chaque classe *k* et un individu de cette classe : elle consiste à « extraire » un individu de chaque classe *k*.

1. C'est-à-dire l'ensemble des classes formées en « extrayant » un individu de chaque classe *k*; ou encore, des combinaisons obtenues en prenant un individu dans chaque classe *k*.

2. Cet ensemble est ce que M. Schönflies appelle *Zuordnungsmenge* ou *Belegungsmenge* des ensembles A et B.

3. Ces définitions reposent sur un postulat qui nous a été signalé par M. Russell, à savoir : Étant donnée une classe de classes exclusives non nulles, on peut extraire un élément de chacune d'elles. Ce postulat est indispensable pour fonder l'Arithmétique; or on n'en connaît pas encore de démonstration valable. V. p. 53, note 3.

correspondant à *b*, quels que soient *a* et *b*[1]. La relation de *similitude* (analogue à celle d'*équivalence*) se définit donc par une relation biuniforme; seulement, cette relation porte, non sur des classes, mais sur des relations. Et en effet, ce ne sont pas, à proprement parler, les *ensembles* qui sont semblables, mais leurs *ordres* : car le même ensemble peut être ordonné de différentes manières; il sera semblable à tel ensemble ordonné dans un certain ordre, mais non dans un autre. C'est donc entre les *ordres*, c'est-à-dire en définitive entre les relations qui les définissent, qu'a lieu la relation de similitude.

De même que de la considération des ensembles équivalents naît par abstraction la notion de nombre cardinal (conçu comme classe d'ensembles équivalents), de la considération des ensembles semblables naît par abstraction la notion de *type d'ordre* (conçu comme classe de relations d'ordre semblables).

Parmi les ensembles ordonnés on distingue les ensembles *bien ordonnés* : ce sont ceux qui contiennent un premier élément, ainsi que chacun des ensembles partiels qu'on y peut déterminer. Il en résulte que, dans un ensemble bien ordonné, chaque élément a un *consécutif* (un élément qui le suit immédiatement), à moins qu'il ne soit le dernier (lequel est unique). Les types d'ordre des ensembles bien ordonnés sont ce qu'on nomme les *nombres ordinaux*[2]. Ceux-ci sont aussi bien infinis que finis, suivant que le nombre cardinal correspondant est infini ou fini : car à chaque nombre ordinal correspond un nombre cardinal, puisque chaque ensemble a un nombre cardinal. Le premier des nombres ordinaux infinis est le type d'ordre de la suite naturelle des nombres, qu'on désigne par ω.

Il arrive qu'on ait à considérer un type d'ordre *inverse* d'un autre, c'est-à-dire celui qu'on obtient en renversant la relation d'ordre entre deux éléments quelconques de l'ensemble (en permutant les mots *précède* et *suit*). Par exemple, on considère le type d'ordre inverse de ω, et on le désigne par $^*\omega$. Or, du

1. Cf. Chapitre III, p. 76.
2. Cf. Chapitre III, p. 77.

moment qu'on sait qu'un type d'ordre est une relation (ou une classe de relations), on reconnaît que le type d'ordre *inverse* est la relation *converse*, et dès lors il convient de le représenter par la même notation (par exemple, $^c\omega$).

C'est à la théorie des ensembles ordonnés qu'appartiennent les concepts de *suite fondamentale* et de *limite* d'une telle suite. Par suite lui appartiennent aussi tous les concepts qu'on peut définir au moyen de ceux-là, comme ceux des ensembles *fermés*, *denses en soi* et *parfaits* [1]. Ces notions sont donc indépendantes de toute considération géométrique ou métrique, et relèvent entièrement de la théorie de l'ordre. Et comme c'est par ces notions que l'on peut définir le continu, le concept de continu lui-même dépend uniquement de la théorie de l'ordre, c'est-à-dire en définitive de la Logique des relations.

Une quatrième partie de la théorie des ensembles est la théorie des ensembles de *points*, où l'on considère les éléments des ensembles étudiés comme des points situés dans un espace à une dimension (droite), à deux (plan), à trois ou même à n dimensions. Peu importe d'ailleurs que cet espace soit géométrique ou arithmétique, c'est-à-dire que les éléments soient conçus comme des points géométriques ou comme des nombres. L'essentiel est qu'ils sont « pris » dans un ensemble préexistant, et que celui-ci peut contenir d'autres éléments ou points « situés » entre ceux de l'ensemble considéré. Cette partie de la théorie des ensembles est la plus compliquée; néanmoins c'est celle qui est apparue la première et qui est la plus développée, parce que c'est celle qui se rapproche le plus du domaine des applications, c'est-à-dire de l'Analyse et de la Géométrie. Elle a pour objet, au fond, les ensembles relatifs à d'autres ensembles, desquels ils sont pour ainsi dire extraits, ou dans lesquels ils sont situés et plongés. C'est dans cette théorie qu'un ensemble peut avoir des points-limites qui ne lui appartiennent pas, et par suite un dérivé qu'il ne contient pas nécessairement. C'est à cette branche de la théorie des

1. Schönflies, *loc. cit.*, p. 32; cf. p. 63.

ensembles qu'appartient donc toute la théorie des ensembles dérivés, avec les notions « métriques » des ensembles *fermés*, *denses en soi* et *parfaits*, telles que M. G. Cantor les avait d'abord définies, et les notions d'ensemble *partout dense* ou *nulle part dense* dans un intervalle (ou ensemble) donné. C'est à elle également qu'appartient la théorie de l'étendue ou du contenu (*Inhalt*) des ensembles, dans laquelle les ensembles sont rapportés à un réceptacle commun, l'espace continu.

Ce caractère *relatif* des propriétés des ensembles de points a été mis en évidence par la généralisation même qu'en a faite M. Baire. Au lieu de considérer des ensembles contenus dans l'espace ordinaire, il considère des ensembles contenus dans un autre ensemble quelconque U (que nous appellerions, en Logistique, l'univers du discours); et il définit *par rapport à cet ensemble* U les propriétés désignées par les mots : *fermé*, *dense en soi*, *partout dense*, *nulle part dense*[1]. En effet, l'ensemble E étant entièrement contenu dans U, et tous deux étant ordonnés de même (c'est-à-dire l'ordre des points de E étant le même que l'ordre qu'ils possèdent comme points de U), un point de U sera un point-limite de E, s'il est limite d'une suite fondamentale de E (laquelle est aussi une suite fondamentale de U). Comme E peut contenir ou ne pas contenir ses points-limites (dans U), tous les concepts énumérés conservent leur sens relatif, tout en étant dépouillés de toute considération métrique, puisque c'est par les relations d'ordre des points de U que sont désormais définis les points-limites de E. On peut dire que cette méthode ramène les propriétés métriques des ensembles à leurs propriétés ordinales (relatives à l'ensemble U considéré comme leur réceptacle ou leur support).

En résumé, la théorie des ensembles, dans sa partie la plus générale, se confond avec la Logique des classes ; et, dans ses autres parties, elle dépend entièrement de la Logique des relations. En particulier, la théorie des ensembles de points se ramène à la théorie des ensembles relatifs (c'est-à-dire situés

1. Schönflies, *loc. cit.*, p. 80.

dans d'autres ensembles); c'est la théorie des ensembles relatifs à l'espace continu; et puisque, comme on l'a vu, on peut définir l'espace continu par ses propriétés ordinales, les fondements de cette théorie sont empruntés exclusivement à la théorie de l'ordre. Cette conclusion ne repose pas seulement sur les considérations théoriques, forcément sommaires et un peu vagues, qui précèdent. M. Russell a effectivement réalisé la théorie des ensembles bien ordonnés au moyen de la Logique des relations, et retrouvé ainsi la plupart des propositions de cette théorie, découvertes par G. Cantor et d'autres mathématiciens. Le rattachement de la théorie des ensembles à la Logistique n'est donc pas un *desideratum* théorique et idéal; c'est un fait accompli.

NOTE II

SUR LA NOTION DE GROUPE

On sait quelle importance la théorie des groupes a prise dans la Mathématique moderne, principalement grâce aux travaux de SOPHUS LIE : ses applications s'étendent à la fois à l'Arithmétique supérieure, à l'Algèbre, à l'Analyse, à la Géométrie et à la Mécanique. Il est donc intéressant de montrer le caractère logique de cette théorie, et comment on peut définir formellement le concept du groupe.

En gros, un groupe est un ensemble d'objets pour lesquels on a défini une combinaison telle, que le résultat de la combinaison de deux objets est un objet du groupe. Ces deux objets sont les données (ou les facteurs) de la combinaison ; le troisième objet est le résultat (ou le produit). Ces données et ce résultat ne sont pas du tout essentiellement des nombres ou des quantités ; ce peuvent être, par exemple, des transformations analytiques ou géométriques. Le résultat de deux transformations de même espèce n'est pas nécessairement de la même espèce : par exemple, le résultat de deux symétries n'est pas une symétrie, mais une translation. Mais, quand des transformations forment un *groupe*, le résultat de deux quelconques d'entre elles est de même espèce, puisqu'il appartient au groupe.

Voici maintenant comment on peut définir rigoureusement cette notion, par un système de postulats indépendants [1]. On

1. HUNTINGTON, *Note on the definitions of abstract groups and fields by sets of independent postulates*, ap. *Transactions of the American Mathe-*

considère une classe K d'objets, et une opération binaire ou combinaison qu'on peut effectuer sur deux quelconques de ces objets, et dont le symbole sera o. On écrira :

$$a \circ b = c$$

pour dire que le résultat de la combinaison de a et de b (pris dans cet ordre) est c. Cela posé, on formule les six postulats suivants :

I. Si a et b sont des K, il y a un élément c de K tel que $a \circ b = c$, et cet élément est déterminé d'une manière unique par a et b.

En d'autres termes, l'opération $a \circ b$ est toujours possible et univoque dans la classe K : elle a toujours un résultat, et un seul. Si elle n'était pas univoque, on ne pourrait pas rigoureusement écrire :

$$a \circ b = c$$

mais seulement :

$$c \,\varepsilon\, (a \circ b)$$

« c est un des éléments qu'on obtient en combinant a et b. »

On voit par là que le fameux axiome d'Euclide : « Egal ajouté à égal donne égal » n'est nullement une propriété de l'égalité, mais une propriété de l'addition, en tant qu'elle est univoque ; et que, par suite, il n'est pas du tout, comme on le croit trop souvent, un axiome logique (analytique).

II. La loi associative est valable pour tout K, c'est-à-dire qu'on a :

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$$

quels que soient les éléments a, b, c de K.

matical Society, t. VI, p. 181-193 (1905). — Cf. les autres mémoires du même auteur : *Simplified definition of a group*, ap. *Bulletin of the American Math. Soc.*, t. VIII, p. 296-300 ; *A second definition of a group*, ibid., p. 388-391 (1902) ; *Two definitions of an Abelian group by sets of independent postulates*, ap. *Trans. Am. Math. Soc.*, t. IV, p. 27-30 ; *Definitions of a field by sets of independent postulates*, ibid., p. 31-37 (1903) ; *A set of postulates for real Algebra, comprising postulates for a one-dimensional continuum and for the theory of groups*, ibid., t. VI, p. 17-41 (1905). Dickson, *Definitions of a field by independent postulates*, ibid., t. IV, p. 13-20 (1903). Moore, *A definition of abstract groups*, ibid., t. III, p. 485-492 (1902).

III. Il y a au moins un élément i de K pour lequel on a :

$$i \circ i = i$$

Cet élément, qui, combiné avec lui-même, se reproduit, est ce que Benjamin Peirce[1] appelait un « idempotent », c'est-à-dire un élément identique à toutes ses « puissances » (puisqu'il est identique à son « carré »).

IV. Il n'y a pas plus d'un élément i tel que l'on ait :

$$i \circ i = i.$$

Cela veut dire que si l'on a à la fois :

$$x \circ x = x \qquad\qquad y \circ y = y,$$

on a nécessairement :

$$x = y$$

Les deux postulats précédents se résument en une phrase : Il y a un « idempotent », et un seul.

V. S'il y a un élément unique i tel que : $i \circ i = i$, ou bien on a : $i \circ a = a$ pour chaque élément a, ou bien on a : $a \circ i = a$ pour chaque élément a.

Cela veut dire que l'élément i désigné dans les postulats III et IV (qui en affirment l'existence et l'unicité) est, ou bien *module à gauche*, ou bien *module à droite*. On appelle *module* d'une opération le terme « de nul effet » dans cette opération, c'est-à-dire qui, combiné avec un autre quelconque, reproduit cet autre. Or, tant qu'il n'est pas établi qu'une opération est commutative, il faut distinguer le premier et le second « facteur », et par suite le module à gauche (comme premier facteur) du module à droite (comme second facteur).

VI. S'il y a un élément unique i tel que $i \circ i = i$, pour chaque élément a il y a, ou bien un élément a'_d tel que $a \circ a'_d = i$, ou bien un élément a'_g tel que $a'_g \circ a = i$.

Cela veut dire que chaque élément a de la classe K a un *réciproque à droite* ou un *réciproque à gauche*. On appelle *réci-*

1. *Linear Associative Algebra*, mémoire posthume datant de 1870, ap. *American Journal of Mathematics*, t. IV, p. 97-229 (1881)

proque d'un terme un terme qui, combiné avec lui, donne pour résultat le module. Et, pour la raison indiquée plus haut, il faut distinguer le réciproque à droite du réciproque à gauche.

Nous venons de dire « le module » sans spécifier si c'est le module à droite ou le module à gauche. Il est sous-entendu que c'est celui des deux qui doit exister, en vertu du postulat V. D'ailleurs, la distinction est oiseuse, car on peut démontrer, au moyen de ces six postulats, que l'élément i est aussi bien module à droite que module à gauche, ou, plus exactement, que, pour tout élément a, on a à la fois :

$$a \circ i = i \circ a = a.$$

On peut donc appeler i purement et simplement *le module*.

Mais de ces six postulats il ne résulte nullement que l'opération $\circ$ soit commutative en général (bien qu'on ait, pour le cas particulier du facteur i, $ai = ia$). Aussi faut-il leur ajouter un 7[e] postulat pour définir un groupe *abélien* (c'est-à-dire commutatif), à savoir la loi commutative elle-même :

VII. Quels que soient les éléments a, b de K, on a :

$$a \circ b = b \circ a.$$

Et ce postulat est indépendant des six premiers. Ceux-ci sont également tous indépendants entre eux, c'est-à-dire qu'aucun d'eux ne peut se déduire des cinq autres.

On en déduit encore les trois théorèmes suivants :

1° Si $a \circ b = a \circ b'$, on a $b = b'$; et si $a \circ b = a' \circ b$, on a $a = a'$.

2° A chaque élément a correspond un élément a^{-1}, et un seul, tel que :

$$a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = i.$$

Cet élément a^{-1} s'appelle le *réciproque* de a. Ainsi chaque élément a un réciproque unique, qui est à la fois réciproque à droite et réciproque à gauche.

3° Deux éléments quelconques a et b déterminent un seul élément x, tel que l'on a : $a \circ x = b$; et un seul élément y tel que l'on a : $y \circ a = b$.

L'élément x est $a^{-1} \circ b$; l'élément y est : $b \circ a^{-1}$. C'est ce qu'on exprime en disant que les deux opérations *inverses* de o sont toujours possibles et univoques.

Telle est la définition d'un groupe relatif à l'opération o; car un ensemble d'objets ne forme un groupe que par rapport à une opération déterminée [1]. Ainsi la notion de groupe comprend à la fois la notion d'ensemble ou classe, et la notion d'opération ou combinaison. Mais qu'est-ce qu'une *opération*, et qu'y a-t-il au fond de cette notion manifestement anthropomorphique, empruntée par métaphore au domaine de l'activité pratique ? On n' « opère » pas réellement sur des objets abstraits ou des entités (des nombres, par exemple) qui sont immuables de leur nature. On ne peut même pas dire qu'on les « combine » comme on combine des éléments chimiques. Quand on dit que la « combinaison » de a et de b a pour « résultat » c, on fait simplement correspondre au couple des objets a et b l'objet c ; autrement dit, on établit une *relation* entre les 3 objets a, b, c. En définitive, une opération (binaire) n'est pas autre chose qu'une relation (ternaire) entre ses données et son résultat. On peut donc formuler la définition du groupe en termes de la Logique des relations [2].

1. Il importe de bien distinguer l'opération par rapport à laquelle le groupe est défini, des objets qui sont les éléments du groupe, lorsque ces objets sont eux-mêmes des opérations. Dans ce cas, l'opération constitutive du groupe consiste en général à effectuer *successivement* deux des opérations qui sont les éléments du groupe ; c'est-à-dire, plus explicitement, si la première opération, effectuée sur l'objet a, a pour résultat b, la deuxième opération sera effectuée sur b, et aura pour résultat c. Le « produit » de ces deux opérations sera l'opération *unique* qui, effectuée sur a, donnerait pour résultat c. D'ailleurs, les opérations élémentaires du groupe sont des opérations unitaires, des correspondances d'un objet à un objet (des relations binaires, en général biuniformes), tandis que l'opération par rapport à laquelle le groupe est défini est une opération binaire, à savoir le produit relatif de deux des relations susdites.

2. C'est ce qu'a fait M. Huntington (*loc. cit.*) d'après une suggestion de M. Bôcher (*Bulletin of the American Mathematical Society*, t. XI, p. 126 ; 1904-05).

APPENDICE

LA PHILOSOPHIE DES MATHÉMATIQUES DE KANT[1].

> Wenn die mathematischen Urtheile nicht synthetisch sind, so fehlt Kant's ganzer Vernunftkritik der Boden.
>
> ZIMMERMANN.

La question fondamentale de la *Critique de la Raison pure* est : « Comment des jugements synthétiques *a priori* sont-ils possibles? » Qu'il existe de tels jugements, c'est ce dont Kant ne doute pas un instant, car ce sont de tels jugements qui constituent, selon lui, la métaphysique et la mathématique pure. Expliquer comment ces jugements sont légitimes en mathématique et illégitimes en métaphysique, tel paraît être le but de la *Critique de la Raison pure*; tel est en tout cas l'objet de la *Méthodologie transcendentale.* « La mathématique fournit l'exemple le plus éclatant d'une raison pure qui réussit à s'étendre d'elle-même sans le secours de l'expérience » (B. 740; cf. p. 8 et 752)[2]; et cet exemple a été séducteur pour la métaphysique[3]. Celle-ci peut-elle légitimement aspirer à la certitude apodictique en employant la même méthode que la

1. Ce mémoire a paru dans la *Revue de Métaphysique et de Morale*, n° de mai 1904 (consacré au centenaire de la mort de Kant).

2. Conformément à l'usage introduit par M. Vaihinger, nous désignons respectivement par A et B la 1[re] et la 2[e] édition de la *Critique de la Raison pure*, dont la pagination se trouve reproduite dans les principales éditions modernes (notamment celles de B. Erdmann et de Kehrbach).

3 Cf. *Fortschritte der Metaphysik*, Introduction (1791); éd. Hartenstein, VIII, 522.

mathématique? Telle est la question (B. 872). Or « la métaphysique est la connaissance rationnelle par concepts; la mathématique est la connaissance rationnelle par construction de concepts » (B. 865, 741). Qu'est-ce que construire un concept? C'est « exposer l'intuition *a priori* qui lui correspond ». La construction des concepts n'est donc possible que si nous possédons des intuitions *a priori*. Celles-ci nous sont fournies par les deux formes *a priori* de la sensibilité, l'espace et le temps. C'est donc l'*Esthétique transcendentale* qui est chargée de répondre à cette question : « Comment les mathématiques pures sont-elles possibles? » (B. 55, 73.) Par là se trouvent déterminés à la fois l'objet des mathématiques et la portée de leur méthode. Leur objet ne peut être que la grandeur, « car seul le concept de grandeur se laisse construire » (B. 742); et l'espace et le temps sont les seules « grandeurs originaires » (B. 753). Leur méthode ne peut s'appliquer qu'à ce qui peut être objet d'intuition, et d'intuition *a priori* : elle ne peut donc s'appliquer ni aux concepts purs et simples, ni aux intuitions empiriques, par exemple aux qualités sensibles (B. 743). La mathématique ne peut avoir pour objets que les concepts qu'on peut construire, à savoir la *figure*, détermination d'une intuition *a priori* dans l'espace, la *durée*, division du temps, et le *nombre*, résultat général de la synthèse d'un seul et même objet dans l'espace et dans le temps, qui par suite mesure la grandeur d'une intuition (B. 752). Ainsi c'est la méthode, et non l'objet, qui distingue essentiellement la mathématique de la métaphysique, et c'est la méthode de la mathématique qui détermine son objet [1]. Par là s'explique que les jugements mathématiques puissent être à la fois synthétiques (comme les jugements empiriques) et *a priori* (comme les jugements analytiques). Ils sont synthétiques, parce qu'ils reposent sur une synthèse effectuée dans l'intuition; et ils sont *a priori*, parce que cette intuition est elle-même *a priori*.

Kant caractérise la méthode mathématique en l'opposant à

1. Cf. *Logique*, Introduction, III (Hartenstein, VIII, 23).

la méthode de la philosophie. La mathématique seule a des *axiomes*, c'est-à-dire des principes synthétiques *a priori*, « parce qu'elle seule peut, en construisant un concept, lier *a priori* et immédiatement ses prédicats dans l'intuition de son objet » (B. 760)[1]. La philosophie ne peut pas avoir d'axiomes, car elle ne peut pas sortir du concept pour le lier à un autre concept. La mathématique seule a des *définitions*, car seule elle crée ses concepts par une synthèse arbitraire ; par suite, ses définitions sont indiscutables et ne peuvent être erronées. Au contraire, on ne peut pas à proprement parler définir, soit les objets empiriques, soit les concepts *a priori*, on ne peut que les décrire, et cette description est toujours discutable, car on ne sait jamais si l'on a épuisé la compréhension d'un concept préalablement donné[2]. Enfin la mathématique seule a des *démonstrations* proprement dites, car « on ne peut appeler démonstration qu'une preuve apodictique, en tant qu'elle est intuitive » (B. 762). La philosophie ne peut pas effectuer des démonstrations sur ses concepts, car il lui manque « la certitude intuitive ». La conclusion de cet examen est la séparation complète, l'opposition absolue de la mathématique, non seulement par rapport à la métaphysique, mais par rapport à la philosophie tout entière, et notamment à la logique. Car la logique repose sur des principes analytiques, qui paraissent se réduire au principe de contradiction ; et elle ne permet d'établir que des jugements analytiques. Si la mathématique peut légitimement énoncer des jugements synthétiques *a priori*, c'est parce qu' « elle ne s'occupe d'objets et de connaissances que dans la mesure où ceux-ci se laissent représenter dans l'intuition » (B. 8). Il est manifeste, d'ailleurs, que si Kant insiste tellement sur la différence des méthodes de la mathématique et de la métaphysique, c'est par réaction contre le rationalisme de Wolff, qui prétendait, comme Leibniz, appliquer à la philosophie la méthode mathématique, comme étant la seule méthode logique et apodictique.

1. Exemple : Trois points sont toujours situés dans un même plan.
2. Cf. *Logique*, § 103.

Nous allons examiner successivement les différentes thèses que nous venons d'énumérer.

Définition des jugements analytiques.

Les jugements mathématiques sont-ils synthétiques? Pour le savoir, il faut d'abord définir les termes de *synthétique* et d'*analytique*. Rappelons la définition textuelle de Kant : « Ou bien le prédicat B appartient au sujet A comme quelque chose qui est contenu (d'une manière cachée) dans ce concept A, ou bien B est tout à fait en dehors du concept A, bien qu'il soit en connexion avec lui[1]. Dans le premier cas j'appelle le jugement *analytique*, dans l'autre, *synthétique* » (B. 10). Cette définition suppose que tous les jugements sont des jugements de prédication. Or il est reconnu aujourd'hui qu'il y a bien d'autres formes de jugements, qui sont irréductibles aux jugements de prédication; autrement dit, qu'il y a une multitude de relations qu'on peut penser et affirmer entre deux ou plusieurs objets, et que ces relations ne peuvent pas se ramener à l'unique relation d'inclusion de deux concepts (exprimée par la copule *est*). Même au point de vue de la logique kantienne, cette définition est trop étroite, car elle ne s'applique qu'aux jugements catégoriques, et non aux jugements hypothétiques et disjonctifs, qui, de l'aveu même de Kant, établissent un rapport, non plus entre deux concepts, mais entre deux ou plusieurs jugements (B. 98). Ce défaut est d'autant plus étonnant que Kant déclare ailleurs n'avoir jamais été satisfait de la définition que les logiciens donnent en général du jugement, en disant que c'est la représentation d'un rapport entre deux concepts (B. 140, § 19 de la *Critique*)[2]. La définition de Kant est donc absolument insuffisante en principe. M. Vaihinger a essayé de la justifier, en

1. On pourrait remarquer que l'alternative n'est pas complète, du moins dans les termes précis de l'énoncé : en effet, entre le cas où B est contenu (entièrement) dans A, et celui où il est tout entier hors de (*ganz ausser*) A, il y a le cas où B n'est ni inclus dans A ni exclu de A. Or ce dernier cas est celui des jugements particuliers.

2. Cette remarque a été faite par Koppelmann, *Kant's Lehre vom analytischen Urtheil*, ap. *Philosophische Monatshefte*, t. XXI, p. 65-101 (1885).

disant qu'elle doit comprendre les jugements de relation, puisque Kant l'appliquera plus tard à de tels jugements (par ex. : $7 + 5 = 12$)[1]; mais c'est là une inférence interprétative que rien dans le texte ne paraît justifier. Tout au contraire, Kant, préoccupé d'établir la généralité de sa définition, n'a pensé qu'à une chose : c'est qu'elle ne s'appliquait qu'aux jugements affirmatifs, et alors il a ajouté entre parenthèses qu'on peut aisément l'étendre « ensuite » aux jugements négatifs[2]. Il n'en est pas moins vrai qu'il a commencé par admettre que « tous les jugements » consistent à « penser le rapport d'un sujet à un prédicat », et que ce rapport est toujours le rapport de prédication, exprimé par la copule *est*.

Cette interprétation est d'ailleurs confirmée par toutes les explications ultérieures de Kant. Les jugements analytiques « n'ajoutent rien au concept du sujet », ils ne font que « le décomposer par démembrement en ses concepts partiels »; tandis que les jugements synthétiques « ajoutent au concept du sujet un prédicat... qui n'aurait pu en être tiré par aucun démembrement » (B. 11). C'est ce que Kant montre (ou croit montrer) par les exemples suivants : Le jugement « Tous les corps sont étendus » est analytique, parce qu'il n'est pas besoin de « sortir » du concept de corps, il suffit de le décomposer pour y trouver l'attribut « étendu ». Le jugement « Tous les corps sont lourds » est synthétique, parce que « le prédicat

1. *Commentar zu Kant's Kritik der reinen Vernunft*, I, 254. Par là même, le savant commentateur de Kant reconnait implicitement l'insuffisance que nous signalons.

2. Et en effet, les jugements négatifs peuvent se ramener à des jugements affirmatifs (de même quantité), en faisant porter la négation sur le prédicat (sur lequel d'ailleurs elle porte en réalité). Toutefois, nous devons dire que Kant n'admet pas cette réduction : il déclare au contraire que la négation logique ne porte jamais sur un concept, mais sur le rapport de deux concepts, c'est-à-dire sur le jugement (B. 602). Dans cette conception, on doit considérer la proposition universelle négative comme la négation de la particulière affirmative, et la particulière négative comme la négation de l'universelle affirmative. Mais alors on n'a plus le droit de dire, comme Kant le fait perpétuellement, que dans un jugement analytique (négatif) « on ne sort pas » du concept du sujet : car si l'on interprète « Nul A n'est B », non comme l'inclusion de non-B dans A (« Tout A est non-B »), mais comme l'exclusion de A et de B, on ne trouve pas dans A la raison de cette exclusion. Cf. KOPPELMANN, *op. cit.*

est tout autre chose que ce que je pense dans le simple concept de corps en général » (B. 11). La pensée de Kant est encore précisée par un passage de la *Logique* (§ 36) : « A tout x auquel convient le concept de corps $(a+b)$, convient aussi l'étendue (b), c'est un exemple de jugement analytique. A tout x auquel convient le concept de corps $(a+b)$, convient aussi l'attraction (c), c'est un exemple de jugement synthétique. » Les lettres par lesquelles Kant a cru devoir représenter les concepts élémentaires[1] prouvent clairement qu'il considère un concept comme un assemblage de « concepts partiels » qui en sont les « caractères essentiels ». Or c'est là une conception unilatérale et simpliste de la Logique, qui remonte à Aristote, que Kant a vraisemblablement héritée de Leibniz, mais qui n'en est pas moins radicalement fausse. Par conséquent, la distinction des jugements analytiques et synthétiques, qui repose sur elle, n'a pas une valeur générale, et nous verrons tout à l'heure qu'elle ne s'applique même pas à tous les exemples que Kant a cités à l'appui. Nous serons donc obligés de lui substituer une autre définition qui ait une valeur universelle[2].

Mais auparavant, il convient de se demander quel est le sens que Kant attribuait exactement à cette distinction. Elle peut recevoir, et elle a en effet reçu des interprètes deux sens bien différents : un sens psychologique et un sens logique. Au sens psychologique, elle porte sur ce que *nous* pensons, en fait, en formulant le jugement; au sens logique, elle porte sur le contenu intellectuel du jugement, contenu objectif et indépendant

1. Tant il est vrai que la Logique formelle ne peut dévenir exacte et précise qu'en employant des symboles.

2. Nous nous abstenons à dessein de discuter la définition « populaire » des jugements analytiques (comme jugements *explicatifs*) et des jugements synthétiques (comme jugements *extensifs*), car elle ne ferait qu'embrouiller la question au lieu de l'éclaircir. Nous voulons seulement remarquer qu'elle a été la source d'une foule de paralogismes, qui consistent en somme à dire que tout jugement qui étend la connaissance, et par suite tout jugement qui constitue vraiment une connaissance, est synthétique. Cette opinion concorde avec la conception qui, fondant toute la Logique sur le seul principe d'identité, la considère comme stérile, et comme ne pouvant engendrer que d'inutiles tautologies.

du sujet qui le pense actuellement[1]. Beaucoup de commentateurs et de critiques ont soutenu cette thèse, que la distinction des jugements analytiques et synthétiques n'a qu'une portée psychologique : un jugement est synthétique la première fois qu'on le formule, parce qu'on découvre un prédicat nouveau d'un sujet déjà connu; il deviendra analytique, dès que le nouveau prédicat sera incorporé au sujet[2]. C'est en ce sens qu'on a pu dire : Le jugement « Les corps sont lourds » peut être synthétique pour le vulgaire, et encore pour le géomètre; mais il est analytique pour le physicien, qui ne peut plus concevoir les corps sans attraction.

Il semble parfois que Kant entende la distinction dans ce sens, car il admet que le prédicat soit contenu dans le sujet « d'une manière latente » (B. 10), qu'il soit pensé « confusément » avec le sujet (B. 11; cf. p. 9); ces expressions semblent se rapporter au caractère psychologique et essentiellement subjectif de la pensée. Kant dit même un peu plus loin : « La question n'est pas de savoir ce que nous *devons* ajouter par la pensée au concept donné, mais ce que nous pensons *réellement* en lui, ne fût-ce qu'obscurément » (B. 17). Mais il ne faudrait pas interpréter ces expressions, à la vérité assez ambiguës, dans un sens psychologique; et le dernier passage cité le prouve. En effet, quand on le rapporte au contexte, on constate qu'il signifie exactement ceci : Toute liaison nécessaire n'est pas analytique; et de ce que nous sommes *obligés* d'unir tel prédicat à tel sujet, il ne s'ensuit pas qu'il y soit *logiquement* contenu[3]. Ainsi Kant entend la distinction au sens logique[4]. Il dit lui-même ailleurs : « La différence d'une représentation confuse et d'une représentation distincte est simplement

1. Cette distinction a été faite avec netteté, dans la question qui nous occupe, par Koppelmann, *op. cit.*, et par Rudolf Seydel : *Kants synthetische Urtheile a priori, insbesondere in der Mathematik*, ap. *Zeitschrift für Philosophie u. phil. Kritik*, t. 94, p. 1-29 (1888).

2. Cf. Trendelenburg, *Logische Untersuchungen*, p. 240 sqq.

3. Cf. Vaihinger, *Commentar*, I, 304.

4. *Prolégomènes*, § 2 a : « Quelle que soit l'*origine* des jugements ou même leur *forme logique*, il y a entre eux une différence quant au *contenu*, suivant laquelle ils sont ou simplement *explicatifs*... ou *extensifs*... »

logique, et ne porte pas sur le contenu » (B. 61). Il est évident qu'il entend ici par *logique* ce que nous entendons par *psychologique*. Il oppose nettement ce que *nous* pensons plus ou moins implicitement dans un concept, et la manière dont nous le pensons, à ce qui y est *contenu* logiquement, que nous le pensions ou non actuellement [1]. Or c'est la définition du concept qui seule détermine son contenu logique. C'est ce qui ressort avec évidence de ces passages : « Je ne dois pas regarder ce que je pense réellement dans mon concept du triangle (*celui-ci n'est rien de plus que la simple définition*)... » (B. 746); et plus loin : « C'est donc en vain que je philosopherais sur le triangle, c'est-à-dire que je le penserais d'une manière discursive, je ne pourrais dépasser si peu que ce soit *la simple définition...* » (B. 747). C'est donc la définition qui sert de critérium aux attributs analytiques, et par suite aux jugements analytiques [2]. Pourquoi le jugement « Tous les corps sont étendus » est-il analytique? C'est que la notion de l'étendue est contenue dans celle de corps, et fait partie de sa définition. Pourquoi le jugement : « Tous les corps sont pesants » est-il synthétique? C'est qu'on n'a pas besoin du caractère *pesant* pour définir le corps; il est complètement défini par d'autres caractères, et par suite celui-là ne peut lui être attribué qu'après coup, *synthétiquement* (B. 12). On le voit : ce qui distingue les attributs analytiques et synthétiques d'un concept, c'est le fait, purement logique, qu'ils font ou ne font pas partie de sa définition [3].

1. D'ailleurs, on sait avec quelle rigueur Kant affirme que la logique est séparée et indépendante de la psychologie (B. 78, et *Logique*, § I; Hartenstein, VIII, 14).

2. Cette interprétation est aussi celle de Koppelmann et de Seydel (*opp. citt.*).

3. On peut s'étonner dès lors que Kant considère comme analytique le jugement : « L'or est jaune », et comme synthétique le jugement : « L'or a la densité 19,5 ». En effet, des deux caractères ainsi attribués à l'or, c'est le second qui est le plus essentiel, et qui fait partie de sa définition chimique. Trendelenburg avait déjà remarqué que le poids est un attribut aussi essentiel des corps, pour le physicien, que l'étendue peut l'être pour le géomètre (Münz, *Die Grundlagen der Kant'schen Erkenntnisstheorie*. Halle a. S. 1882).

Principe des jugements analytiques.

D'autre part, quel est, selon Kant, le fondement des jugements analytiques? C'est tantôt le principe d'identité, tantôt le principe de contradiction, qu'il a tour à tour distingués et confondus [1]. Dans la *Principiorum primorum cognitionis metaphysicæ nova dilucidatio* (1755), Kant considérait le principe d'identité, et non pas le principe de contradiction, comme le fondement de toutes les vérités, tant négatives qu'affirmatives, sous cette double forme : *Ce qui est, est*; *ce qui n'est pas, n'est pas*. Dans l'*Untersuchung über die Deutlichkeit der Grundsätze der natürlichen Theologie und der Moral*, III, § 3 (1764), Kant considérait le principe d'identité comme le fondement des jugements affirmatifs, et le principe de contradiction comme le fondement des jugements négatifs, et taxait même d'erreur ceux qui considèrent le second comme le principe unique de toutes les vérités. Dans la *Critique*, il n'admet plus qu'un « principe suprême de tous les jugements analytiques », c'est le principe de contradiction, qu'il formule comme suit : « A aucune chose ne convient un prédicat qui lui contredit » [2], et il déclare expressément que, « quand un jugement est analytique, *qu'il soit négatif ou affirmatif*, sa vérité doit toujours pouvoir être suffisamment reconnue d'après le principe de contradiction » (B. 190). A vrai dire, on ne voit pas bien comment ce principe tout négatif peut servir de fondement à tous les jugements analytiques, « tant affirmatifs que négatifs ». Le type du jugement analytique affirmatif est, nous l'avons vu : « *ab* est *a* ». Or le principe de contradiction, tel que Kant le formule, nous interdit d'attribuer au sujet *ab* le prédicat non-*a*, ou le prédicat non-*b*; mais il ne nous dit nullement quel prédicat nous pouvons ou devons lui attribuer.

1. Cf. Steckelmacher, *Die formale Logik Kant's in ihren Beziehungen zur transcendentalen* (Breslau, 1879).

2. Cette formule n'est pas la plus simple possible. De $ab \supset -b$ on déduit : $ab \supset \Lambda$, par exemple en multipliant les deux membres par b : le premier reste ab, le second devient : $b\text{-}b = \Lambda$. C'est cette dernière formule qui est le véritable principe de contradiction, dont celle de Kant n'est, on le voit, qu'une conséquence.

Dans les *Prolégomènes* (§ 2, b), Kant explique sa pensée : « Comme le prédicat d'un jugement analytique affirmatif est déjà pensé auparavant dans le concept du sujet, il ne peut être nié de ce sujet sans contradiction [1]... » Qu'est-ce à dire? Il ne s'agit pas de le nier, mais de l'affirmer; or si le principe de contradiction nous interdit de le nier, il ne nous commande pas de l'affirmer, à moins que « ne pas nier » ne soit synonyme d' « affirmer » [2]. Kant continue : « de même son contraire est nécessairement nié du sujet dans un jugement analytique mais négatif, et cela encore en conséquence du principe de contradiction ». Ceci est juste, mais cela prouve seulement que le principe de contradiction est le fondement des jugements analytiques *négatifs*. Il faut chercher ailleurs celui des jugements analytiques *affirmatifs*, probablement dans le principe d'identité. Enfin, dans sa *Logique*, Introduction, § VII (1800), Kant admet trois principes logiques : le *principe d'identité* ou *de contradiction*, fondement des jugements problématiques; le *principe de raison suffisante*, fondement des jugements assertoriques; et le *principe du tiers exclu*, fondement des jugements apodictiques. Ainsi il considérait alors le principe de raison comme analytique, tandis que dans les *Prolégomènes*, § 4 (1783), il le qualifie de synthétique. Il est difficile, il faut l'avouer, de varier plus souvent et plus complètement sur une question aussi fondamentale.

Il est probable que dans la *Critique* Kant identifiait le principe d'identité au principe de contradiction : d'ailleurs, il confond assez souvent les jugements analytiques avec les jugements identiques, et les appelle du même nom [3]. Les

1. Cf. *Critique de la Raison pure*, B. 190.

2. Kant dit, de même, dans la *Critique* (B. 190-191) : « Le concept [contenu dans le sujet] doit nécessairement en être affirmé, pour cette raison que le contraire serait contradictoire au sujet. » Cela suppose que l'on doit nécessairement affirmer d'un sujet quelconque l'un ou l'autre des deux concepts contradictoires, c'est-à-dire cela suppose le principe du milieu exclu : « x est a ou non-a ». Or c'est là un troisième principe logique indépendant des deux autres.

3. Dans la *Logique*, §§ 36, 37, il appelle les uns et les autres des jugements analytiques : les uns *implicitement*, les autres *explicitement* (dans ce dernier cas, ils sont dits *tautologiques*). Dans la *Critique* (A. 594), il

jugements analytiques seraient des jugements virtuellement identiques, et c'est sans doute là ce qu'il voulait dire quand il parlait de prédicats contenus d'une manière « latente », « confuse » ou « obscure » dans le sujet. Mais le principe d'identité ne justifie que les jugements identiques, et non les jugements analytiques. Jamais de la formule : « a est a » on ne pourra déduire la formule : « ab est a », pour cette raison bien simple que celle-ci contient une opération ou combinaison (la multiplication logique) qui ne figure pas dans le principe d'identité. C'est pourquoi la logique moderne se voit obligée d'admettre le *principe de simplification* (ab est a) à côté du principe d'identité et indépendamment de lui. Il semble que cette objection ne soit qu'une chicane; mais elle a plus de portée qu'on ne pense. Elle prouve, en somme, la fausseté de la conception traditionnelle de la Logique formelle, suivant laquelle celle-ci reposait tout entière sur un seul principe, le principe d'identité; d'où l'on concluait aussitôt que cette Logique est absolument stérile, parce qu'elle ne permet que de passer du même au même, et ne justifie que de vaines tautologies.

Ainsi, si nous voulons interpréter équitablement la doctrine de Kant en la rectifiant à la lumière de la Logique moderne, il faudra dire que le fondement des jugements analytiques est le principe de simplification. Mais cette formule est trop étroite. En effet, lorsque Kant dit que « tous les raisonnements des mathématiciens s'effectuent d'après le principe de contradiction » (B. 14), il veut dire, au fond, qu'ils s'effectuent suivant les règles de la Logique. Or nous savons aujourd'hui que la Logique formelle ne peut se constituer sans une vingtaine de principes indépendants. Quels que soient au surplus leur nombre et leur énoncé, nous devrons, pour interpréter Kant dans le sens le plus large et le plus favorable, substituer l'expression « les principes de la Logique » à son expression

appelle au contraire *identiques* les jugements analytiques (VAIHINGER, I, 257). Enfin, dans les opuscules *Fortschritte* et *Entdeckung*, il ne veut pas qu'on appelle « identiques » les jugements analytiques, parce que ceux-ci ne deviennent évidents que par la décomposition du sujet.

« le principe de contradiction ». Et par conséquent nous devrons dire que les jugements analytiques sont ceux qui reposent uniquement sur les principes de la Logique.

Cette formule n'est pas encore suffisante, et il nous faut la compléter, en nous inspirant des explications de Kant lui-même. En effet, les principes de la Logique sont essentiellement formels, donc vides de tout contenu. Pour effectuer un raisonnement quelconque, il faut les appliquer à une matière. Cette matière ne peut s'introduire dans un système logique que sous forme de définitions. Il est évident, en effet, que l'on ne peut raisonner sur des termes que s'ils sont préalablement définis. Nous avons vu plus haut que, selon Kant lui-même, le critérium des jugements analytiques et synthétiques réside en somme dans les définitions. Tout ce qui est contenu dans la définition d'un concept ou s'en déduit logiquement en est un caractère analytique; tout ce qui s'y ajoute, fût-ce en vertu d'une nécessité extra-logique, est un caractère synthétique. Il faut donc dire, pour conserver autant que possible l'esprit, sinon la lettre de la doctrine kantienne : un jugement est analytique, lorsqu'il peut se déduire uniquement des définitions et des principes de la Logique [1]. Il est synthétique, si sa démonstration (ou sa vérification) suppose d'autres données que les principes logiques et les définitions.

Définitions analytiques et synthétiques.

On pourrait nous objecter la distinction que Kant établit entre les définitions analytiques et les définitions synthétiques. Cette distinction, indiquée en passant dans la *Critique de la*

1. Cette définition du jugement analytique a été proposée par G. Heymans, ap. *Zeitschrift für Philosophie u. phil. Kritik*, t. XCVI, p. 161-172 (1889). Elle se trouve déjà dans Frege, *Grundlagen der Arithmetik*, § 3 (1884). Ce dernier ouvrage est, de beaucoup, celui où la théorie kantienne de l'Arithmétique a été discutée avec le plus de force et de profondeur, et celui qui nous a le plus servi dans le présent travail. Or c'est aussi le seul que les bibliographies relatives à Kant ne mentionnent pas. Vanité des bibliographies!

Raison pure [1], se trouve formulée didactiquement dans la *Logique*, § 100; mais elle remonte à la période antécritique, et elle est surtout développée dans l'*Untersuchung über die Deutlichkeit der Grundsätze der natürlichen Theologie und der Moral* (1764) dont elle constitue, semble-t-il, l'idée directrice. Une définition analytique est celle d'un concept *donné*; une définition analytique est celle d'un concept *fabriqué* [2]. On comprend l'origine de ces deux expressions : une définition analytique consiste à décomposer un concept préalablement existant; une définition synthétique, au contraire, compose le concept et le forme de toutes pièces. Or, d'après la *Logique* (§§ 102, 103), les concepts empiriques ne peuvent être définis synthétiquement; les définitions synthétiques ne peuvent donc s'appliquer qu'à des concepts formés *a priori*, donc arbitrairement : mais les concepts arbitrairement formés sont les concepts mathématiques. Ainsi toutes les définitions mathématiques sont essentiellement synthétiques.

On pourrait discuter au point de vue historique la valeur de cette distinction, qui date d'une époque où Kant était à peu près empiriste. En effet, cette distinction, dans l'opuscule de 1764, est tout à fait « tendancieuse » : elle est destinée à opposer entre elles la mathématique et la philosophie au point de vue de leur méthode et de leur certitude; et elle aboutit à cette conséquence, qu' « on doit procéder analytiquement en métaphysique, car le rôle de celle-ci est d'analyser des connaissances confuses ». Cette thèse paraît toute contraire à la doctrine criticiste, suivant laquelle les jugements métaphysiques seraient synthétiques, tout comme les jugements mathématiques. Il n'en est pas moins remarquable qu'elle se trouve dans cet opuscule en connexion avec quelques-unes des propo-

1. Les définitions philosophiques sont analytiques, parce qu'elles exposent un concept donné; les définitions mathématiques sont synthétiques, parce qu'elles construisent un concept (B. 758). Cette distinction cadre d'ailleurs assez mal avec la thèse que soutient Kant dans le même passage, à savoir que la mathématique *seule* a des définitions, mais ce n'est là sans doute qu'une question de mots.

2. Nous évitons de dire : « construit », pour ne pas produire d'équivoque avec le sens spécial que Kant attribue à ce mot.

sitions de la Méthodologie transcendentale, à savoir : que la mathématique commence par les définitions, tandis que la philosophie finit par elles; que les mathématiques considèrent le général dans le particulier, et raisonnent sur les signes *in concreto*, ce qui les préserve de l'erreur; que la certitude philosophique est d'une autre nature que la certitude mathématique, et que rien n'est plus funeste à la métaphysique que l'exemple de la mathématique, c'est-à-dire l'imitation de la méthode de celle-ci. Il ne suffit donc pas de constater que la distinction en question date de la période antécritique pour pouvoir conclure qu'elle n'est pas conforme à la pure doctrine criticiste.

Une autre remarque s'impose : dans l'opuscule de 1764, Kant considère les concepts mathématiques comme ceux qui sont fabriqués *a priori* et arbitrairement; en d'autres termes, il définit la mathématique comme la science qui fabrique *a priori* ses objets. Or c'est là une conception différente de celle qu'on trouve dans la *Critique*, où la mathématique est définie : la connaissance rationnelle par construction de concepts. Dans le premier cas, la méthode mathématique peut s'appliquer à tous les concepts arbitrairement formés; dans le second cas, elle ne s'applique qu'aux concepts *constructibles*, c'est-à-dire représentables dans l'intuition [1]. Cette différence est ou peut être de grande conséquence : qu'est-ce qui prouve, en effet, que la métaphysique ne puisse pas, elle aussi, fabriquer ses concepts *a priori*, et par suite employer la méthode dite mathématique? Ce qui dans la *Critique* caractérise les concepts mathématiques, ce n'est pas qu'ils sont synthétiques, mais bien qu'ils sont intuitifs; or il n'est pas question d'intuition dans l'opuscule de 1763 [2]. Bref, il n'y a rien là qui puisse justifier la distinction absolue de la mathématique et de la philosophie, telle qu'elle se trouve dans la *Critique*,

1. On voit pourquoi nous avons tenu à distinguer avec grand soin les expressions « construire » et « fabriquer ».

2. C'est seulement en 1768, comme on sait, que Kant a « découvert » que les jugements mathématiques reposent sur l'intuition : *Von dem ersten Grunde des Unterschiedes der Gegenden im Raume.*

puisque c'est l'intuition qui y différencie les jugements mathématiques des jugements métaphysiques, les uns et les autres étant également synthétiques *a priori*.

Mais ce ne sont là que des difficultés accessoires. L'objection capitale est celle-ci : De ce que les définitions mathématiques sont synthétiques et les définitions métaphysiques analytiques, s'ensuit-il que les jugements mathématiques soient synthétiques? Pas plus qu'il ne s'ensuit que les jugements métaphysiques soient analytiques. En effet, les caractères d'*analytique* et de *synthétique* sont attribués, dans le premier cas aux concepts, et dans le second cas aux propositions. Il y a là en réalité deux sens différents de ces mots; et si l'on pouvait tirer une conséquence de l'un à l'autre, ce serait la contraire de celle que Kant paraît en tirer. En effet, de ce que les concepts mathématiques sont fabriqués *a priori* et n'existent que par leur définition même, il résulte que l'esprit sait d'avance tout ce qu'il y a mis, et ne peut plus porter sur eux que des jugements analytiques; au contraire, si les concepts métaphysiques sont donnés tout faits en quelque sorte, et si leur analyse est si difficile et presque toujours incomplète, il est bien probable que les jugements qu'on porte sur eux sont synthétiques. En résumé, les concepts synthétiques semblent devoir donner lieu à des jugements analytiques, et les concepts analytiques à des jugements synthétiques [1]. Nous ne disons pas que cette conclusion soit logiquement justifiée, mais seulement qu'elle est beaucoup plus plausible que la conclusion contraire, et que par conséquent on ne peut point inférer du caractère synthétique des *définitions* mathématiques le caractère synthétique des *jugements* mathématiques [2].

1. M. Vaihinger conjecture même que telle a été à un moment donné la pensée de Kant (I, 273). Nous n'allons pas si loin, et en tout cas nous n'avons pas besoin de cette hypothèse historique.

2. Cette confusion a été déjà dénoncée par M. Vaihinger et par Koppelmann (*op. cit.*). Richard Manno soutient avec raison qu'un jugement qui dérive logiquement d'une définition est analytique, alors même que cette définition repose (comme toutes les définitions mathématiques) sur une synthèse arbitraire : *Wesen und Bedeutung der Synthesis in Kants Philosophie*, ap. *Zeitschrift für Philosophie*, t. 94 (1888).

Que si nous consultons, non plus l'opinion de Kant, mais l'usage des mathématiciens, nous constatons que toutes les définitions mathématiques sont purement *nominales*. Elles consistent à déterminer le sens d'un terme nouveau et supposé inconnu en fonction des termes anciens dont le sens est déjà connu (soit qu'on les ait précédemment définis, soit qu'on les considère comme indéfinissables). Plus rigoureusement encore, dans le style de la Logique mathématique, une définition est une égalité logique (une *identité*) dont le premier membre est un signe nouveau qui n'a pas encore de sens, et dont le second membre, composé de signes connus (et par conséquent ne contenant pas le signe à définir), détermine le sens du signe en question. Une définition *n'est pas une proposition*, car elle n'est ni vraie ni fausse; on ne peut ni la démontrer ni la réfuter; c'est une *convention* qui porte uniquement sur l'emploi d'un signe simple substitué à un ensemble de signes. Sans doute, une fois cette convention admise, elle devient une proposition, en ce sens qu'on l'invoque pour substituer un membre à l'autre dans les déductions ultérieures (autrement, à quoi servirait-elle?); mais c'est une proposition *identique*, puisque non seulement le premier membre n'a pas d'autre sens que le second, mais qu'il n'a de sens *que par* le second. Il y a plus : cette proposition identique ne peut être considérée à aucun degré comme un *principe* de démonstration, attendu que toutes les déductions qu'on en tire consistent à substituer le défini au définissant [1], ou inversement; on pourrait donc effectuer les mêmes déductions (d'une manière plus longue et plus compliquée seulement) en se passant entièrement de la définition, et en remplaçant partout le défini par le définissant. En résumé, une définition n'est ni une vérité ni une source de vérités; elle ne fait pas partie de l'enchaînement logique des propositions, elle n'en est qu'un auxiliaire commode, un moyen d'abréviation. Par conséquent, peu importe qu'on l'appelle

1. Nous disons « définissant » et non pas « définition », puisque, comme nous venons de le dire, la « définition » est proprement l'égalité logique du « définissant » et du défini.

analytique ou synthétique (c'est une question de mots), sa nature et sa forme ne peuvent influer en aucune manière sur le caractère analytique ou synthétique des propositions qu'on en déduit, ou plutôt qu'on déduit par son moyen. Et dans tous les cas, dans la mesure où une définition joue le rôle d'une proposition, ce n'est et ne peut être jamais qu'une proposition *identique* [1].

*
* *

Ces principes un fois établis, nous allons rechercher si les principes et les démonstrations des Mathématiques sont vraiment synthétiques. Toutefois, il importe d'observer que l'opinion de Kant paraît avoir varié au sujet des démonstrations. Dans la *Méthodologie transcendentale*, nous l'avons vu, il soutient que la mathématique seule a des démonstrations, c'est-à-dire des preuves apodictiques, *en tant qu'intuitives* : et il refuse le nom de démonstration aux déductions purement logiques (analytiques) tirées des seuls concepts. Au contraire, dans les *Prolégomènes* (§ 2 c) et dans l'*Introduction* de la *Critique* (B. 14), il déclare que « les raisonnements mathématiques procèdent *tous* suivant le principe de contradiction (*ce qu'exige la nature de toute certitude apodictique*) ». Il est difficile de ne pas trouver là une contradiction. Mais il est aisé de voir que dans ce dernier passage il fait une concession imprudente à ceux qui soutiennent que les jugements mathématiques sont analytiques, et c'est la Méthodologie qui contient sa véritable pensée, sa doctrine réfléchie et systématique.

Quelles sont les mathématiques pures?

Il y a une autre question préliminaire, plus difficile à résoudre : c'est de savoir quelles sont les sciences que Kant a

1. Cette théorie de la définition mathématique a été exposée avec beaucoup de rigueur par Frege, *Grundlagen der Arithmetik* (1884), et *Grundgesetze der Arithmetik*, t. I, § 27 (1893), t. II, §§ 55-67 (1903). Elle a été aussi formulée et appliquée par M. Peano dans son *Formulaire de Mathématiques*. Cf. Peano, *Les définitions mathématiques*, et Burali-Forti, *Sur les différentes méthodes logiques pour la définition du nombre réel*, ap. *Bibliothèque du Congrès de Philosophie*, t. III.

considérées comme faisant partie de la Mathématique pure, et quel est leur rapport aux deux formes *a priori* de la sensibilité qui en sont selon lui le fondement. La pensée de Kant est singulièrement flottante sur ces deux points, pourtant essentiels. Dans la *Dissertatio* de 1770, l'espace était l'objet de la Géométrie, le temps celui de la Mécanique pure; et ces deux sciences faisaient partie de la Mathématique pure. Quant au nombre, c'était un « concept intellectuel », qui se réalisait *in concreto* au moyen de l'espace et du temps[1]. Dans l'*Esthétique transcendentale*, l'espace est le fondement des vérités géométriques, mais on ne dit pas de quelle science le temps est le fondement; les principes apodictiques fondés sur cette forme *a priori* sont les suivants : « le temps n'a qu'une dimension; des temps différents ne sont pas simultanés, mais successifs » (§ 4, 3). Tels sont les « axiomes du temps » selon la 1re édition de la *Critique*; ils n'ont, comme on voit, rien de commun avec les axiomes de l'Arithmétique. Dans l' « explication transcendentale » ajoutée à la 2e édition (§ 5), Kant est un peu plus explicite : le temps fonde la possibilité de tout changement, en particulier du mouvement (changement de lieu), et par suite de « la science générale du mouvement, qui n'est pas peu féconde », et qui est déclarée être une connaissance synthétique *a priori*. Cette conception est d'ailleurs conforme à la thèse soutenue par Kant au sujet du principe de contradiction, à savoir que ce principe devient synthétique dès qu'on y introduit la notion de temps en l'énonçant comme suit : « Il est impossible qu'une chose soit et ne soit pas *en même temps* » (A. 152, B. 191)[2]. Mais elle s'accorde mal avec ce que Kant

1. « Hinc MATHESIS PURA *spatium* considerat in GEOMETRIA, *tempus* in MECHANICA pura. Accedit hisce conceptus quidam, in se quidem intellectualis, sed cujus tamen actuatio in concreto exigit opitulantes notiones temporis et spatii (successive addendo plura et juxta se simul ponendo), qui est conceptus *numeri*, quem tractat ARITHMETICA. » *De mundi sensibilis et intelligibilis forma et principiis*, § 12. Cf. R. SEYDEL, *Kants synthetische Urtheile a priori, insbesondere in der Mathematik*, ap. *Zeitschrift für Philosophie*, t. 94 (1888); E. FINK, *Kant als Mathematiker*, In.-Dissertation (Erlangen, 1889).

2. Cf. Esthétique transc., § 5 : « Nur in der Zeit können beide contra-

déclare dans l'Esthétique transcendentale (§ 7), à savoir que le concept du mouvement est empirique, parce qu'il présuppose la perception de quelque chose de mobile (A. 41, B. 58). Kant y insiste même : il affirme que « dans l'espace considéré en lui-même il n'y a rien de mobile », que le mobile ne peut être trouvé dans l'espace que par l'expérience, et par suite est une donnée empirique. Même le concept de changement ne peut être une donnée *a priori* de l'Esthétique transcendentale, car le temps lui-même ne change pas, c'est le contenu du temps qui change. On se demande alors ce que devient, dans cette théorie, la « science générale du mouvement » que Kant considérait un peu plus haut comme pure et *a priori* [1].

La pensée de Kant paraît se préciser et se fixer dans la théorie du schématisme, où, comme on sait, le nombre est présenté comme un schème (le schème de la grandeur), c'est-à-dire comme une détermination *a priori* de l'intuition du temps (et non de l'espace). Mais, si l'on consulte la Méthodologie transcendentale, on trouve que le nombre se rapporte à la fois ou indifféremment à l'espace et au temps (A. 724, B. 752). Dans les *Prolégomènes* (§ 10), deux ans seulement après l'apparition de la *Critique*, Kant détermine ainsi les rapports des sciences mathématiques aux intuitions *a priori* : « La Géométrie prend pour base l'intuition pure de l'espace. L'Arithmétique produit elle-même ses concepts de nombre dans le temps par l'addition successive des unités; mais surtout la Mécanique pure ne peut produire ses concepts de mouvement qu'au moyen de la représentation du temps. » Les mots « mais surtout » trahissent l'embarras de Kant et ses hésitations [2]. Dans la *Préface* des *Premiers Principes métaphysiques de la Science de la Nature* (1786), il soutient que « la mathématique n'est pas applicable

dictorisch entgegengesetzte Bestimmungen in einem Dinge, nämlich nach einander, anzutreffen sein. »

1. En outre, si Kant n'admet même pas une Mécanique ou au moins une Cinématique pure, on se demande comment il peut admettre une Physique pure, qui présuppose bien plus encore le concept de matière.
2. Remarque déjà faite par MICHAELIS, *Ueber Kants Zahlbegriff*, Programme, Berlin, 1884.

aux phénomènes du sens interne et à leurs lois », parce que « cette extension de la connaissance, comparée à celle que la mathématique procure à la théorie des corps, serait à peu près ce qu'est la théorie des propriétés de la ligne droite à la géométrie tout entière; car l'intuition pure interne... est le temps, qui n'a qu'une seule dimension[1] ». Ainsi la mathématique du temps n'existe pour ainsi dire pas, ou se réduit à très peu de chose, à ce que Kant appelle (*ibid.*) « la *loi de continuité* dans l'écoulement des modifications du sens interne ». On voit qu'il n'est pas question ici d'Arithmétique, et encore moins de Mécanique. A travers toutes ces fluctuations, il n'y a qu'un point fixe : c'est la correspondance de la Géométrie à l'espace. Mais Kant hésite sur la science dont le temps est le fondement[2]. Celle-ci est tantôt l'Arithmétique, conformément à la théorie du schématisme, et tantôt la Mécanique, conformément au bon sens. Mais bientôt Kant s'aperçoit que la Mécanique repose sur l'espace aussi bien que sur le temps, ou bien qu'elle implique une donnée empirique (la matière, sujet du mouvement), et alors il revient à la conception de l'Arithmétique comme science pure du temps, bien qu'elle ne le satisfasse pas[3]. Mais il y est en quelque sorte acculé par la logique de son système[4]. Quoi qu'il en soit, nous nous en tiendrons à la division indiquée dans l'*Introduction* : nous ne considérerons comme mathématiques pures que l'Arithmétique (avec l'Algèbre et l'Analyse) d'une part, et la Géométrie d'autre part; et nous examinerons tour à tour les propositions de ces deux sciences pour rechercher leur caractère synthétique ou analytique.

1. Ed. Hartenstein, IV, 361.

2. On a déjà remarqué que la théorie de Kant sur l'Arithmétique n'est pas indépendante, qu'elle a été dominée et viciée par des préoccupations systématiques et par la fausse analogie de la Géométrie : MICHAELIS, *op. cit.*; W. BRIX, *Das math. Zahlbegriff und seine Entwicklungsformen*, ap. *Philos. Studien*, t. V et VI (1890-1891), chap. III, § 1.

3. Beaucoup de Kantiens ont eu moins de scrupules sur ce point, et sir W. R. HAMILTON n'a pas craint de considérer l'Algèbre comme la science du temps pur (*Essay on Algebra as the Science of pure Time*, 1833).

4. Comme l'a fort bien remarqué MICHAELIS, *op. cit.*

Les jugements arithmétiques sont-ils synthétiques?

Comme Kant ne prouve sa thèse que par des exemples, nous sommes obligé de discuter ses propres exemples. Raisonnant sur l'égalité particulière $7 + 5 = 12$, il affirme que « le concept de la somme de 7 et de 5 ne contient rien de plus que la réunion des deux nombres en un seul », que cette réunion n'implique nullement la pensée de ce nombre unique; qu'on peut analyser tant qu'on veut le concept de cette somme sans y trouver le nombre 12; et qu'il faut pour cela « sortir » de ce concept et recourir à l'intuition, par exemple en comptant sur ses doigts (B. 15). Ce sont là autant d'affirmations gratuites, qui ne seraient justifiées que dans une conception grossièrement empiriste de l'Arithmétique[1]. Tout au contraire, le concept de la somme de 7 et de 5, par cela même qu'il implique la réunion des deux nombres (ou, plus exactement, de leurs unités) en un seul nombre, contient ce nombre même, attendu que celui-ci est déterminé par là d'une manière univoque; entre $7 + 5$ et 12 il y a, non seulement égalité, mais *identité absolue*[2]. Cette proposition résulte donc, d'une part, du principe d'identité, d'autre part, de la définition de la somme et des nombres 7 et 5, et par conséquent elle est analytique[3]. Il

1. Il importe de remarquer que Kant prend pour exemple une vérité arithmétique particulière (ou mieux : singulière) pour laquelle sa thèse paraît plus plausible. Or on pourrait supposer que sa thèse peut être vraie pour les propositions singulières, mais qu'elle est fausse pour les propositions générales qui constituent proprement les théorèmes de la science des nombres. C'est pour ceux-ci que Kant aurait dû justifier sa thèse. Mais peut-être les considérait-il (à tort) comme des théorèmes d'Algèbre. Dans ce cas, nous renvoyons le lecteur à ce que nous disons plus loin de l'Algèbre.

2. C'est ce qu'ont déjà soutenu Zimmermann, *Ueber Kant's mathematischer Vorurtheil und dessen Folgen*, ap. *Sitzungsberichte der k. Akademie der Wissenschaften zu Wien*, philos.-hist. Klasse, séance du 11 janv. 1871 (t. 67, p. 7-48), et R. Seydel, *Kants synthetische Urtheile a priori, insbesondere in der Mathematik*, ap. *Zeitschrift für Philosophie*, t. 94 (1888).

3. Voici d'ailleurs la démonstration formelle de cette proposition :
Définitions :

$$2 = 1 + 1,\ 3 = 2 + 1,\ 4 = 3 + 1,\ 5 = 4 + 1,\ 6 = 5 + 1,\ 7 = 6 + 1,$$
$$8 = 7 + 1,\ 9 = 8 + 1,\ 10 = 9 + 1,\ 11 = 10 + 1,\ 12 = 11 + 1.$$ (Tournez.)

n'est pas besoin de recourir à aucune intuition, que ce soit celle des doigts de la main, de jetons ou de cailloux, pour démontrer en toute rigueur cette proposition [1]. Kant prétend que le caractère synthétique des vérités arithmétiques apparaît encore mieux lorsqu'il s'agit de nombres élevés (B. 16). Mais cet argument se retourne contre lui. En effet, il est pratiquement impossible d'avoir l'intuition précise et complète de nombres de l'ordre des millions, et jamais on ne pourrait les manier ni les calculer exactement s'il fallait recourir à l'intuition. Ce qui est vrai des grands nombres l'est aussi des plus petits, et par conséquent ce n'est pas l'intuition, mais le raisonnement, qui nous permet d'affirmer que 2 et 2 font 4.

Telle n'est pas l'opinion de Kant, qui considère au contraire toutes les vérités arithmétiques singulières de ce genre comme des propositions « immédiatement certaines », « évidentes » et « indémontrables » (B. 204-205). Il en résulte cette conséquence fort choquante, qu'on devrait admettre une infinité d'axiomes, puisque de telles vérités sont en nombre infini [2].

En vertu de la définition de la somme, on a :

$$a + (b + 1) = (a + b) + 1.$$

Donc :

$$7 + 5 = 7 + (4 + 1) = (7 + 4) + 1.$$
$$7 + 4 = 7 + (3 + 1) = (7 + 3) + 1.$$
$$7 + 3 = 7 + (2 + 1) = (7 + 2) + 1.$$
$$7 + 2 = 7 + (1 + 1) = (7 + 1) + 1.$$

Or :

$$7 + 1 = 8.$$

Donc :

$$7 + 2 = (7 + 1) + 1 = 8 + 1 = 9.$$
$$7 + 3 = (7 + 2) + 1 = 9 + 1 = 10.$$
$$7 + 4 = (7 + 3) + 1 = 10 + 1 = 11.$$
$$7 + 5 = (7 + 4) + 1 = 11 + 1 = 12.$$

C. q. f. d.

On remarquera que nous avons constamment procédé par substitution de termes égaux, c'est-à-dire *identiques*, de sorte que notre démonstration est plus simple et plus *analytique* qu'aucun syllogisme.

1. J. Pommer (*Zur Abwehr einiger Angriffe auf Kant's Lehre von der synthetischen Natur mathematischer Urtheile*) invoque les procédés pédagogiques de l'école primaire. Cet argument se retourne contre lui : car à l'école primaire aussi on invoque l'intuition pour établir la loi commutative de la multiplication (au moyen d'un tableau). Or on peut (quoi qu'en dise cet auteur) démontrer logiquement la loi commutative, sans appel à l'intuition, de même qu'on démontre logiquement $7 + 5 = 12$.

2. Remarque faite par W. Brix, *op. cit.*, ch. III, § 3.

Kant a aperçu la difficulté, et il s'en tire en appelant ces vérités, non pas des axiomes, mais des « formules numériques », parce qu'elles ne sont pas générales (comme les axiomes de la Géométrie). Quel que soit le nom qu'il leur donne, il n'en est pas moins vrai qu'il admet une infinité de propositions premières synthétiques et irréductibles, ce qui est peu conforme à l'idée d'une science rationnelle. Mais alors, comment se fait-il qu'on ait besoin du calcul, et parfois même de longs calculs, pour les découvrir ou les démontrer? Si les vérités arithmétiques étaient réellement intuitives, il ne serait pas si difficile de s'assurer qu'un nombre donné est premier, ou de vérifier (je ne dis pas : de démontrer) le fameux théorème de Goldbach : « Tout nombre pair est la somme de deux nombres premiers ». En réalité, il y a là une erreur fondamentale sur la nature des vérités arithmétiques singulières, qui sont toutes démontrables; les seules vérités primitives ou indémontrables de l'Arithmétique sont des propositions générales ou axiomes, dont précisément Kant ne s'occupe pas.

Il ne suffit pas de réfuter une erreur, dit-on souvent, il faut l'expliquer. Celle de Kant s'explique par sa conception étroite et simpliste de la Logique[1]. Il dit, dans le dernier passage cité : « Nous pourrions tourner et retourner nos concepts tant que nous voulons, nous n'arriverions jamais à trouver la somme par la simple décomposition de nos concepts... » (B. 16). Mais qui nous dit que tous les concepts sont « composés » de concepts partiels, de telle sorte qu'il suffise de les « décomposer » pour découvrir toutes leurs propriétés? C'est là une hypothèse gratuite de la vieille Logique, qui peut s'appliquer à certains concepts empiriques, mais qui précisément ne s'applique pas

1. Cette conception se manifeste déjà dans l'opuscule sur *Les Quantités négatives* (1763) par la distinction des raisons logiques, conséquences du principe d'identité, et des raisons réelles, dont Kant donne un exemple dans cette phrase : « Vous pouvez analyser tant que vous voudrez le concept de la volonté divine, vous n'y trouverez jamais un monde existant, comme s'il était contenu en elle et posé par elle en vertu de l'identité » (Ed. Hart., II, 104). On remarquera l'analogie formelle de cette phrase avec celles de la *Critique* où il est question de jugements synthétiques (B. 15; B. 744, etc.).

aux concepts mathématiques[1]. La même exigence presque naïve se manifeste dans un autre passage : « Je ne pense le nombre 12 ni dans la représentation de 7, ni dans celle de 5, ni dans la représentation de la réunion (*Zusammensetzung*) des deux » (B. 205). Que le concept de 12 ne soit contenu ni dans 7, ni dans 5, cela est trop évident; mais qu'il ne soit pas contenu dans la « réunion » de 7 et de 5, cela est justement la question : et cela dépend de ce qu'on entendra par « réunion ». Kant a si bien senti la faiblesse de cet argument, qu'il ajoute une parenthèse où il paraît faire une distinction subtile entre « réunion » et « addition » : « Que je doive penser le nombre 12 *dans l'addition des deux*, il n'en est pas question ici » (il nous semble, au contraire, que c'est bien là la question), « car dans un jugement analytique il s'agit seulement de savoir si je pense réellement le prédicat dans la représentation du sujet. » On croirait, au premier abord, que Kant se réfugie ici dans une considération d'ordre psychologique, en distinguant ce qu'on *doit* penser et ce qu'on pense *réellement* : à quoi l'on répondrait que, s'il ne pense pas *réellement* le prédicat dans la représentation du sujet, c'est qu'il ne se représente pas *réellement* celui-ci : il est clair que si l'on se contente d'une pensée symbolique (comme disait Leibniz), c'est-à-dire de la représentation des signes 7, +, 5, on n'aura pas par là l'idée du nombre 12; mais si l'on pense *réellement* 7 unités d'une part, 5 unités d'autre part, et qu'on les pense *réellement* comme réunies en un seul nombre (ce qui est le sens du signe +), on pensera par là même nécessairement le nombre 12[2].

1. Si l'on veut voir combien la Logique classique se montre insuffisante en présence des jugements mathématiques les plus simples, on n'a qu'à lire l'opuscule déjà cité de J. POMMER. On y trouvera cet argument, que le prédicat, dans $7 + 5 = 12$, n'est pas 12, mais « égal à 12 », attendu que la copule logique n'est pas « égale », mais « est »; d'où il suit que la converse de $7 + 5 = 12$ n'est pas : $12 = 7 + 5$, mais bien : « Quelque chose égale à 12 est la somme de 7 et de 5 ». Un pareil commentaire de la thèse kantienne équivaut à une réfutation par l'absurde. Cf. W. REICHARDT, cité plus bas (p. 265, note 1).

2. L'argument suivant de HEYMANS semble être une parodie de celui de Kant : L'idée de 12 n'est contenue ni dans 7, ni dans 5, ni dans +; car aucune de ces notions ne dit qu'on peut prolonger la suite naturelle des

Mais tel n'est pas le véritable sens de cette proposition, comme le montre son analogie de forme avec une proposition que nous avons commentée précédemment (B. 17). Elle signifie en réalité (malgré l'emploi équivoque et irrégulier que Kant fait, dans la même phrase, des termes de « pensée » et de « représentation ») : « Ce n'est pas en réunissant *dans la pensée* les deux concepts de 7 et de 5 que j'obtiens le concept de 12; c'est en les construisant *dans l'intuition*, et en réunissant *dans l'intuition* les deux collections correspondantes pour en former une seule. » Mais, d'abord, si Kant admet réellement que les nombres sont des concepts, ce ne peuvent être que des concepts de collections; le nombre 7 est le concept d'une collection de 7 objets, et ainsi de suite; mais il ne faut pas le confondre avec une collection particulière, de même qu'en général il ne faut pas confondre un concept avec l'un quelconque des objets auxquels il s'applique. Or, si l'Arithmétique porte réellement sur les concepts de nombres, et non sur des collections particulières (comme des tas de cailloux), l'addition des nombres doit être une combinaison conceptuelle, et non pas intuitive; sans doute, elle peut être représentée dans l'intuition, comme les nombres eux-mêmes, mais cette opération a une valeur générale et formelle, elle est indépendante de la nature des objets qui servent à la représenter, c'est donc une opération idéale, et non intuitive. D'ailleurs, la liaison qu'elle établit entre les deux nombres, ou plutôt entre leurs unités, est de la même nature que la liaison qui existe entre les unités de chaque nombre, et qui constitue ce nombre; il serait donc absurde d'admettre un lien idéal entre les unités constituantes de chaque nombre, et de n'admettre qu'un lien intuitif entre les unités respectives des deux nombres. Si donc on considère l'addition comme une opération essentiellement intuitive, il faut soutenir que les nombres eux-mêmes n'existent que dans

nombres au delà de 7, et que par conséquent 12 existe (*Noch einmal : analytisch, synthetisch*, ap. *Zeitschrift für Philosophie*, t. 96, 1889). Assurément : mais cette prolongation indéfinie est « contenue » dans la notion même de nombre entier, puisque le principe d'induction fait partie de sa définition.

l'intuition (ce qui est la thèse des empiristes), et que les « concepts » de nombres se réduisent à des mots ou à des signes vides de sens [1].

Le raisonnement précédent répond à l'argument assez étrange contenu dans cette phrase ajoutée à la 2e édition de la *Critique* : « Que l'on doive ajouter 5 à 7, je l'ai sans doute pensé dans le concept d'une somme $= 7 + 5$, mais non pas que cette somme soit égale au nombre 12 » (B. 16). Kuno Fischer a commenté ce passage d'une manière qui en constitue la meilleure réfutation : « $7 + 5$, le sujet de la proposition, dit : Additionne les deux grandeurs! Le prédicat 12 dit qu'elles sont additionnées. Le *sujet* est un *problème*, le *prédicat* est la *solution* [2]. » C'est là une conception logique bien bizarre : où a-t-on jamais vu qu'un problème soit le sujet d'une proposition, et que sa solution en soit le prédicat? Un problème est une proposition (interrogative ou problématique), et sa solution est une autre proposition (assertorique ou apodictique). D'ailleurs, comment passe-t-on des données d'un problème à la solution? Ce ne peut être que par un acte d'intelligence, par un raisonnement, et non par une opération mécanique ou par une intuition. Mais c'est là une façon illégitime de *dramatiser* la question, car c'est faire intervenir des considérations psychologiques qui n'ont rien à faire ici. Peu importe qu'une proposition se présente à l'esprit comme un problème ou comme un théorème; peu importe le temps qu'on met à la vérifier ou la manière dont on y parvient; tout cela est affaire personnelle. D'abord, un membre d'une égalité mathématique ne peut pas être un problème; c'est cette égalité tout entière qui est, ou un problème, ou une solution, au point de vue psychologique [3]; et, logiquement, c'est une vérité éternelle qui ne dépend pas des conditions dans lesquelles nous parvenons à sa connaissance [4]. Mais ce qu'il y

1. Nous avons été heureux de retrouver cette objection dans VAIHINGER, *Commentar*, I, 296, note 1.
2. VAIHINGER, I, 297.
3. « Les *problèmes* sont des propositions démontrables et qui ont besoin d'une démonstration. » KANT, *Logique*, § 38.
4. De même Kant dit d'un jugement analytique : « Que tous les corps

a de plus étonnant, c'est qu'un problème que l'entendement pose (puisque Kant parle du *concept* de la somme 7 + 5) ne puisse être résolu que par l'intuition. En réalité, il y a vraiment un problème, si « 7 + 5 » n'est qu'un assemblage de mots prononcés ou de signes écrits, qui sert de véhicule à l'idée entre deux esprits (par exemple de l'esprit du maître à celui de l'élève qu'il interroge); mais si l'on pense réellement le sens de ces mots ou de ces signes, il n'y a plus de problème, ou plutôt la position du problème en est la solution, car le même esprit qui pense 7 + 5 pense en même temps 12. Encore une fois, cette égalité mathématique ne représente nullement une opération pénible ou compliquée, mais une *identité* absolue. La synthèse ne s'effectue pas dans le passage du 1er au 2e membre (figuré par le signe =), mais dans la formation du 1er (figurée par le signe +). Or il ne s'agit pas de savoir comment nous avons formé le sujet, mais si ce sujet, supposé formé et donné, contient le prédicat.

Au fond, dans la phrase que nous discutons, Kant joue sur les mots de *réunion* et d'*addition*. Il paraît vouloir dire que, pour obtenir le nombre 12, il ne suffit pas de réunir par la pensée les deux nombres 7 et 5, comme on réunit deux concepts partiels (*animal* et *raisonnable* par exemple, pour en composer un concept total, *homme*): il faut les *additionner*, et cette opération, selon lui, ne peut s'effectuer que dans et par l'intuition. La distinction est juste, mais elle se retourne contre Kant. En effet, le sujet n'est pas « 7 et 5 », mais « 7 + 5 », ce qui signifie que pour le former il ne suffit pas de réunir les deux nombres, mais qu'il faut les additionner, et c'est ce qu'indique expressément le signe +. Si Kant refuse de les additionner, et se contente de les réunir, il n'a plus le droit de parler du concept de *somme*, même à titre problématique. En résumé, il reproche à l'addition arithmétique de n'être pas la multiplication logique, comme s'il ne pouvait y avoir qu'un seul mode de combinaison des concepts,

soient étendus, cela est nécessairement et éternellement vrai, qu'ils existent ou non... » *Entdeckung* (Rosenkranz, I, 463).

et il se croit autorisé par là à substituer celle-ci à celle-là; il ne fait que dénaturer le problème, si problème il y a. De même que les concepts de nombres ne se laissent pas définir *per genus et differentiam*, ni décomposer en facteurs logiques, ils ne se laissent pas non plus combiner par le procédé de la multiplication logique. Cela ne prouve qu'une chose : l'étroitesse et l'insuffisance de la Logique classique.

Mais il ne faudrait pas en conclure que l'addition arithmétique échappe aux prises de la vraie Logique, car elle peut et doit se définir au moyen de l'addition logique [1]. Soit a une collection de 7 objets et b une collection de 5 objets; on suppose que ces deux collections n'aient aucun élément commun. La somme de 7 et de 5 est le nombre de la collection formée en réunissant ces deux collections, c'est-à-dire de la *somme logique* de a et de b. Lorsque Kant prétend qu'il faut « sortir » des concepts de 7 et de 5 pour trouver 12, il veut dire simplement ceci, que cette somme s'obtient, non en combinant directement les deux nombres, mais en additionnant des classes qui y correspondent; autrement dit, non par une multiplication logique, mais par une addition logique [2]. Mais il ne faut pas dire qu'on « sort » par là du concept $7+5$, car c'est précisément là ce qu'il signifie : on ne fait que le réaliser dans l'esprit.

On nous objectera peut-être que, par le fait même qu'on substitue aux concepts de nombres les classes correspondantes, on passe du domaine de la pensée dans celui de l'intuition : on représente les nombres par des classes ou collections d'objets : cela ne donne-t-il pas raison à Kant, en montrant que l'addition est une opération imaginative, et non intellectuelle? A cela nous répondrons : Encore une fois, un nombre

1. Voir chap II, p. 52.

2. C'est la remarque déjà faite par Leibniz, quand il disait : $a+a=a$ au point de vue logique, c'est-à-dire quand le signe $+$ désigne l'addition (ou plutôt la multiplication) logique; $a+a=2a$ au point de vue mathématique, c'est-à-dire quand le signe $+$ désigne l'addition arithmétique; parce qu'ici les deux a ne représentent pas le même nombre, mais deux collections distinctes ayant le même nombre. Cf. p. 53, note 1.

n'est pas autre chose que le concept d'une collection; demander que l'on conçoive le nombre sans penser une collection, c'est demander l'impossible[1]. D'autre part, c'est une loi psychologique que tout concept, même le plus abstrait et le plus « pur », a besoin de s'appuyer sur quelque image; il est donc naturel et nécessaire que nos raisonnements sur les nombres s'accompagnent d'images plus ou moins vagues. Mais la question épistémologique, absolument indépendante de ces circonstances psychologiques, est celle-ci : Quel est le fondement logique des vérités arithmétiques? Est-ce le concept, ou est-ce l'intuition? Lorsque Kant considère comme analytiques des jugements comme ceux-ci : « L'or est jaune », ou « Tout corps est étendu », il ne prétend pas que, en formulant ces jugements, nous bannissions toute image sensible : car ce serait encore plus difficile que pour les vérités arithmétiques. Il n'exige pas que nous pensions l'or sans imaginer sa couleur, ni les corps sans imaginer leur étendue (puisque, selon sa propre doctrine, nous ne pouvons jamais nous débarrasser de l'intuition de l'espace); et pourtant il ne soutient pas que les susdits jugements soient entachés d'intuition, et par suite synthétiques. Pourquoi? C'est que, quelle qu'en soit l'origine psychologique, et quelles que soient les images dont ils s'accompagnent inévitablement, les concepts d'*or* et de *corps* comprennent actuellement, par définition, les concepts de *jaune* et d'*étendu*[2]. Eh bien, de même, le concept, non pas de « 7 et 5 », mais de « $7+5$ », de quelque manière qu'on l'ait formé, contient actuellement et par définition le concept de 12, bien mieux, il lui est identique.

1. MASSONIUS (*Ueber Kant's transscendentale Aesthetik, Eine kritische Untersuchung*... In.-Dissertation, Leipzig, 1890) a soutenu une thèse analogue (§ I) : les jugements mathématiques sont analytiques, parce que l'intuition est contenue dans les concepts; car ces concepts ne seraient rien sans l'intuition.

2. Cf. *Prolégomènes*, § 2 b : « Toutes les propositions analytiques sont des jugements *a priori*, alors même que leurs concepts sont empiriques. » (exemple : l'or est un métal jaune). Cela prouve bien que le caractère logique du jugement ne dépend nullement de l'origine du concept, qui est toujours le produit d'une synthèse (empirique ou *a priori*).

Ce raisonnement trouve dans les explications ultérieures de Kant une précieuse confirmation. Il reconnaît en effet lui-même, un peu plus loin, que la mathématique emploie quelques principes analytiques (quand ce ne serait que le principe d'identité : $a = a$), et il déclare que, « bien qu'ils soient valables d'après les seuls concepts, ils ne sont admis dans la mathématique que parce qu'ils peuvent être représentés dans l'intuition » (B. 17). Mais, inversement, de ce que des propositions sont représentées dans l'intuition (même nécessairement), elles ne sont pas pour cela synthétiques, et peuvent « être valables d'après les seuls concepts [1] ». Au surplus, on pourrait remarquer que Kant choisit assez malencontreusement son exemple de principe analytique : « Le tout est plus grand que la partie », qu'il formule : « $a + b > a$ ». En effet, cette proposition n'est même pas un principe ou un axiome, car elle n'est vraie que pour certaines espèces de grandeurs, et non pour toutes. C'est un simple théorème que l'on démontre dans chaque cas, moyennant la définition des signes $+$ et $>$ (à moins qu'on ne prenne cette formule pour définition du signe $>$). Par exemple, ce théorème est vrai pour les nombres finis, mais il n'est plus vrai pour les nombres cardinaux infinis [2]. Sans doute, on ne peut reprocher à Kant d'avoir ignoré ces vérités, si élémentaires qu'elles soient aujourd'hui. Mais on se demande, néanmoins, comment il a pu, en vertu de ses propres principes, admettre qu'une telle proposition est analytique. En effet, si l'on considère le premier membre, il contient le signe d'addition, il est une somme, tout comme $7 + 5$, et si celle-ci est fondée sur l'intuition, celle-là doit l'être aussi : si l'on ne sait pas (analytiquement) que $7 + 5$, c'est

1. Il ne faut pas se laisser induire en erreur par la phrase suivante (« Was uns hier gemeiniglich glauben macht,... ») car, comme l'a bien montré VAIHINGER (I, 303), elle se rapporte, par une anacoluthe assez étrange, au paragraphe antérieur, où il est question des jugements *synthétiques*. Il ne faut pas en conclure que Kant déclare synthétiques ces mêmes principes qu'il vient de déclarer analytiques.

2. L'un et l'autre ont été formellement démontrés par M. WHITEHEAD, *On cardinal numbers*, sect. III, ap. *American Journal of Mathematics*, t. XXIV (1902).

le nombre 12, on ne peut pas savoir non plus quelle est la somme de a et de b, ni par suite si elle est plus grande que a. D'autre part, si l'on considère la copule (le signe $>$), il est facile de se rendre compte que la vérité de cette proposition dépend essentiellement du sens ou de la définition de cette copule. Quel que soit ce sens, il a toutes chances d'être moins analytique que celui de la copule $=$ (qui, nous l'avons vu, signifie l'identité); il serait aisé à un Kantien de soutenir que la relation *plus grand que* repose sur l'intuition. Kant n'a pu croire un instant que le prédicat (a) « est contenu » (au sens logique) dans le sujet ($a + b$); car, d'une part, ce sujet n'est pas un produit logique, mais une somme mathématique, et d'autre part la copule du jugement n'est pas le verbe *être*, ce n'est donc pas un jugement de prédication, comme semble l'exiger la définition des jugements analytiques[1]. Il n'a pas pu davantage se faire cette illusion, que le jugement en question repose sur le principe de contradiction, car qu'est-ce qu'il y a de contradictoire à poser : « $a+b=a$ » ou « $a+b<a$ », à moins qu'on ne fasse intervenir l'intuition, c'est-à-dire une espèce particulière de grandeurs et une opération particulière figurée par $+$, auquel cas il peut bien y avoir une contradiction, non pas dans notre jugement, mais entre notre jugement et l'intuition? Bref, de quelque façon qu'on examine cette proposition, on ne découvre aucune raison de la considérer comme analytique qui ne vaille *a fortiori* pour « $7+5=12$ », et l'on ne trouve non plus aucune raison de considérer « $7+5=12$ » comme synthétique qui ne vaille *a fortiori* pour « $a+b>a$ ». Que faut-il en conclure, sinon que la distinction des jugements analytiques et synthétiques était

1. Wilibald Reichardt (*Kant's Lehre von den synthetischen Urtheilen a priori in ihrer Bedeutung für die Mathematik*, ap. *Philosophische Studien*, t. IV, 1888), en raisonnant suivant la méthode kantienne, aboutit à cette conclusion, que le jugement $a+b>a$ est synthétique, parce que le sujet ($a+b$) ne contient pas le prédicat « $>a$ »! On voit quel est l'inconvénient d'appliquer aux jugements mathématiques une théorie logique qui ne leur convient pas, et de les traiter comme des jugements de prédication. Cf. ce que nous avons dit plus haut au sujet de Pommer (p. 258, note 1).

singulièrement vague et flottante dans l'esprit même de son auteur [1]?

Au surplus, elle l'a parfois induit en des erreurs flagrantes. Par exemple, il considère comme un jugement analytique ce principe : « Égal ajouté (ou retranché) à égal donne égal », parce qu'on y a immédiatement conscience de l'identité des deux grandeurs comparées (B. 204). Or c'est là une erreur, car ce jugement, loin de reposer sur le principe d'identité, énonce une propriété de l'addition (ou de la soustraction), à savoir que cette opération est *uniforme*. C'est donc là un axiome, qui est vrai pour certaines opérations et faux pour d'autres [2]. Par exemple, l'extraction des racines n'étant pas une opération uniforme, on ne peut pas écrire : $\sqrt{4} = \sqrt{4}$, bien que cette égalité ait toutes les apparences de l'identité, et que, selon les mots mêmes de Kant, on ait immédiatement conscience d'une identité dans la génération de la grandeur : car $\sqrt{4}$ peut être aussi bien $+2$ que -2, de sorte que l'égalité considérée pourrait conduire à l'égalité absurde : $+2 = -2$.

Le schématisme.

Il ne reste plus qu'un seul argument en faveur de la nature synthétique des vérités arithmétiques : c'est la conception du nombre, telle qu'elle résulte de la théorie du schématisme. On sait que, selon Kant, le nombre, schème de la grandeur, « est une représentation qui embrasse l'addition successive d'une unité à une autre (de même espèce) »; et, par suite, « le nombre n'est pas autre chose que l'unité de la synthèse de la multiplicité d'une intuition homogène en général, par le fait qu'on engendre le temps lui-même dans l'appréhension de

1. L'exemple le plus frappant des variations de la pensée de Kant dans l'application de sa distinction fondamentale des jugements analytiques et synthétiques est le principe de l'unité nécessaire de l'aperception, qu'il considère comme synthétique dans la 1re édition de la *Critique* (A. 117, note) et comme analytique dans la 2e (B. 135, 138). V. Koppelmann, *art. cit.*, § V.

2. Voir p. 12, note 1, et p. 107, note 1.

l'intuition » (B. 182). Ainsi, en tant que schème, le nombre est intermédiaire entre la sensibilité et l'entendement : il est à la fois intellectuel et intuitif. D'un côté, il est un produit de l'imagination ; mais d'un autre côté, il participe de la généralité du concept, et par là se distingue de l'image.

De cette conception il résulte que le nombre a un contenu intuitif, et qu'il implique essentiellement la succession. C'est l'intuition, en particulier l'intuition du temps, qui sert de fondement aux jugements arithmétiques, et qui seule explique leur nature synthétique. Mais d'abord il convient de faire des réserves sur la portée de cette théorie. Sans doute, s'il est établi par ailleurs que les jugements arithmétiques sont synthétiques, on pourra trouver l'explication de ce fait dans la nature intuitive du nombre, et même en tirer argument en faveur de celle-ci ; mais, en admettant que le nombre procède, au moins en partie, de l'intuition, peut-on en conclure que les jugements arithmétiques soient synthétiques? Pas le moins du monde, et les discussions précédentes nous apprennent pourquoi. Nous avons vu en effet que le caractère synthétique des *jugements* ne dépend nullement de la nature des *concepts*, de leur origine ou de leur mode de formation ; et nous savons que, de l'aveu même de Kant, on peut porter des jugements analytiques sur des concepts empiriques comme ceux de *corps* ou d'*or*, qui sont le produit d'une synthèse intuitive. Peu importe que l'intuition sur laquelle repose cette synthèse soit empirique, tandis que le nombre repose sur une intuition *a priori* : cela ne change rien à la nature synthétique de tous ces concepts, et cela n'empêche pas du tout qu'ils puissent être l'objet de jugements analytiques fondés sur leur définition.

Nous pourrions nous contenter de ce *non sequitur*, et nous dispenser de discuter la théorie kantienne du nombre. Nous le ferons d'ailleurs très brièvement, car nous avons étudié ailleurs la même question avec plus de développement [1]. Que le nombre enveloppe nécessairement la succession, c'est là une

1. *De l'Infini mathématique*, 2e partie, livre I, ch. IV : Le nombre, l'espace et le temps.

proposition psychologique, et qui, même au point de vue psychologique, est plus que contestable, au moins pour les petits nombres : n'a-t-on pas l'intuition absolument simultanée de 2, 3, 4, 5 points, surtout quand ils sont régulièrement disposés? Comment pourrait-on lire la lettre Δ, par exemple, si l'on n'avait pas la perception simultanée de ses 3 côtés et de ses 3 sommets? Comment les aveugles eux-mêmes pourraient-ils distinguer au toucher les lettres de l'alphabet Braille, s'ils ne percevaient simultanément les points (au nombre de 6 au plus) qui composent chacune d'elles? Quoi qu'il en soit, du reste, ces considérations psychologiques n'ont aucune valeur dans la question épistémologique qui nous occupe. Il ne s'agit pas de savoir comment nous *prenons conscience* d'un nombre, mais en quoi consiste la *notion* d'un nombre. Or dans cette notion il ne reste rien des opérations psychologiques, simultanées ou successives, par lesquelles nous l'avons formée, et pour cette bonne raison, qu'il faut que nous ayons conscience *simultanément* de toutes les unités pour pouvoir dire que nous pensons un nombre et *quel* nombre nous pensons. Au fond, quiconque fait intervenir le temps dans la notion de nombre confond celle-ci (à la manière des empiristes) avec l'opération du dénombrement. Or il est facile de montrer que le dénombrement présuppose l'idée de nombre, loin de l'engendrer, et qu'en tout cas, l'idée de nombre fût-elle postérieure au dénombrement, il n'y reste pas plus de trace du temps employé à cette opération, qu'il ne reste, dans un édifice, de trace de l'échafaudage qui a servi à le construire [1].

Au surplus, qui prouve trop ne prouve rien; or l'argument psychologique que nous discutons ne tend à rien de moins qu'à prouver que le temps fait partie intégrante de toutes nos idées et de toutes nos connaissances, puisqu'il est la forme générale, non seulement de la sensibilité, mais de toute la vie mentale, et que tous nos actes, même les plus intellectuels, se passent forcément dans le temps. Un monument, un tableau sont, bien

1. Cette thèse a été fort bien soutenue par Michaelis (*op. cit.*).

plus certainement que le nombre, le produit d'une synthèse forcément successive, soit d'assises de pierre, soit de touches de pinceaux juxtaposées *et superposées*; et pourtant, une fois terminés, ils ne conservent rien de la durée consacrée à leur élaboration. Un raisonnement purement logique « prend du temps » pour s'effectuer dans l'esprit; il ne s'ensuit pas qu'il implique si peu que ce soit une synthèse intuitive et temporelle.

Dira-t-on que la synthèse intuitive qui constitue le nombre s'effectue dans l'espace, et non dans le temps, ou dans l'espace aussi bien que dans le temps? Cette interprétation, quoique contraire à la théorie du schématisme, pourrait s'appuyer sur les passages précédemment cités de l'*Introduction* et des *Prolégomènes*, car dans ceux-ci le nombre est présenté comme un schème spatial, et non comme un schème temporel. Mais la thèse qui fait reposer le nombre sur l'intuition de l'espace n'est pas plus solide que celle qui le fonde sur l'intuition du temps : car, de même qu'on peut dénombrer des objets qui ne sont pas successifs ni même soumis au temps, on peut dénombrer des objets qui ne sont ni étendus ni même situés dans l'espace : des notions, par exemple, ou des propositions. D'ailleurs, on ne ferait que reculer la difficulté, car l'espace lui-même, selon Kant, ne peut être perçu que dans le temps. Il soutient en effet que l'espace est une grandeur extensive, c'est-à-dire telle que la représentation du tout n'est possible que par la représentation *préalable* des parties[1] (B. 203). Or les grandeurs extensives ne peuvent être appréhendées que par une synthèse *successive* de leurs parties (B. 204); et Kant répète plus loin la même assertion au sujet des grandeurs *continues* : la synthèse (de l'imagination productive) qui les engendre est un

1. Il est difficile de concilier cette assertion avec cette thèse de l'Esthétique transcendentale, que l'espace est « une grandeur infinie donnée », et que ses parties « ne peuvent pas être pensées *avant lui*,... mais seulement *en lui* » (B. 39). La même assertion reparait dans l'*Antinomie* (B. 466) : les parties de l'espace ne sont possibles que dans le tout, et non le tout par les parties. Cette contradiction a été déjà signalée par P. SCHRÖDER, *Kants Lehre vom Raum* (1904).

processus dans le temps[1] (B. 212); et d'ailleurs l'espace et le temps sont des grandeurs continues (B. 211). Qu'est-ce à dire, sinon que les grandeurs spatiales et l'espace lui-même ne peuvent être appréhendés qu'à travers le temps? Aussi Kant affirme-t-il que la Géométrie, elle aussi, « repose sur la synthèse successive de l'imagination productive dans la génération des figures » (B. 204); par exemple, on ne peut pas se représenter une ligne sans la tirer dans la pensée, et par suite l'engendrer dans le temps (B. 203; cf. 154, 137-138). Cet exemple suffit à juger toute cette théorie; elle consiste à confondre, à la manière des empiristes, les *idées* géométriques avec les *images* subjectives qui leur servent de support intuitif. L'idée d'une ligne est aussi indépendante de l'image que l'on obtient en la « tirant » par la pensée, que de la figure sensible qu'on réalise avec un tire-ligne sur le papier ou avec la craie sur le tableau. On n'a pas plus le droit de dire qu'une ligne enveloppe une certaine durée, que de dire qu'elle se compose d'encre de Chine ou de carbonate de chaux[2].

Au surplus, la théorie du schématisme donne lieu, en ce qui concerne le nombre, à bien des difficultés. On sait qu'un schème est « la représentation d'un procédé général de l'imagination pour procurer à un concept son image » (B. 179-180). Or Kant distingue le nombre, comme schème de la grandeur, de l'image qu'on en construit, par exemple, à l'aide de points (B. 179). La pensée d'un nombre particulier « est la représentation d'une méthode pour représenter une multitude (par exemple 1000) conformément à un certain concept dans une image, plutôt que

1. On ne voit pas bien, dès lors, comment cette propriété distingue les grandeurs continues des autres. Du reste, la définition que Kant donne des grandeurs continues n'a plus aucune valeur à présent : il les définit en effet par cette propriété qu'aucune partie n'est la plus petite possible (B. 211); or c'est là la divisibilité à l'infini, et personne n'ignore aujourd'hui qu'elle ne suffit pas à constituer la continuité.

2. On pourrait soutenir que le nombre est le produit, non plus d'une synthèse intuitive, mais d'une synthèse intellectuelle, et essayer de conserver ainsi le caractère synthétique des jugements arithmétiques. (Ce paraît être la conclusion de Michaelis, *op. cit.*) Nous nous bornerons à constater que c'est là une thèse toute différente de la thèse kantienne, où l'intuition est essentielle, et que seule nous avons à discuter ici.

cette image même, qu'il serait difficile, dans ce dernier cas, d'embrasser et de comparer au concept » (B. 179). Mais qu'est-ce que ce concept, sinon la notion d'une multitude composée de 1000 unités, c'est-à-dire la notion même du nombre 1000? Dès lors, que vient faire le schème entre ce concept et son image? S'il est un produit de l'imagination, il ne peut être que confus comme l'image même; s'il est une méthode *générale* de construction, il ne diffère pas du concept; dans tous les cas, on ne voit pas comment il peut faciliter la comparaison et le rapprochement du concept et de l'image.

D'autre part, si le nombre est le schème de la grandeur, il semble que le concept que le nombre représente soit le concept d'une grandeur. Mais qu'est-ce qui fait que tel nombre représente telle grandeur plutôt que telle autre? C'est qu'il exprime le rapport de cette grandeur à la grandeur-unité de même espèce; or le choix de cette unité est complètement arbitraire. Il n'y a donc dans la notion d'une grandeur rien qui indique qu'elle doive avoir pour « schème » tel nombre plutôt qu'un autre. De plus, si la grandeur est un concept, et si elle ne peut être schématisée que par le nombre, que devient la théorie kantienne suivant laquelle toute grandeur est intuitive, et revêt nécessairement la forme de l'espace et du temps? Enfin, quel est le rapport du nombre, en tant que schème, avec les « schèmes » des figures géométriques? On dira sans doute que le nombre est un schème temporel, tandis que les schèmes géométriques sont spatiaux. Pourtant, Kant admet que le nombre 5 a pour image cinq points alignés; or, si l'on généralise ce procédé de construction, on obtiendra un schème *spatial* du nombre 5; et, d'autre part, la construction des figures géométriques étant *successive* selon Kant, les schèmes géométriques doivent impliquer aussi le temps. On ne voit donc pas ce qui distingue le nombre des schèmes géométriques, ni en quoi l'Arithmétique diffère de la Géométrie, tant par sa méthode que par son objet. Et pourtant tout le monde sent la différence qu'il y a entre les nombres et les figures géométriques; les premiers sont plus abstraits, plus généraux, plus

intellectuels, et ont une portée universelle : tout obéit aux lois du nombre, tandis que tout ne tombe pas sous les prises de la Géométrie. En résumé, si le nombre est un schème, il ne peut être le schème, ni du nombre, ni de la grandeur, de sorte qu'on ne sait pas de quoi il est le schème.

Le nombre et la grandeur.

D'ailleurs, il est difficile de se faire une idée précise de la théorie de Kant sur la grandeur et ses rapports avec le nombre. En principe, la grandeur est une catégorie, c'est-à-dire un concept *a priori* de l'entendement[1]; elle a pour schème le nombre, et pour image l'espace (B. 182). Le nombre serait alors un intermédiaire entre la grandeur et l'espace, le véhicule de celle-là dans celui-ci. Mais le concept de grandeur, comme toutes les catégories, n'a de valeur objective que par son application aux données d'une expérience possible, c'est-à-dire à l'intuition. Il faut donc « rendre les concepts sensibles », et c'est à cela que servent les schèmes. Ainsi, selon Kant, le concept de grandeur cherche son support et son sens dans le nombre, et celui-ci dans les doigts, les boules du tableau à calculer, les traits ou les points (B. 299). Il semble, par suite, qu'on ne puisse penser la grandeur, en mathématiques, que par l'intermédiaire du nombre, et, remarquons-le bien, du nombre entier et concret, qui est essentiellement discontinu. On ne pourra donc concevoir la grandeur elle-même que comme discontinue; et en effet, selon Kant, on ne peut pas la définir autrement qu'en disant que c'est la détermination d'une chose par laquelle on pense combien de fois elle en contient une autre (B. 300). Et il ajoute que ce « combien de fois »

1. Il ne faut pas oublier que, si la *quantité* est une catégorie, c'est en vertu d'un véritable jeu de mots : car la quantité logique (qui est l'origine et le fondement de cette catégorie) n'a que le nom de commun avec la quantité mathématique. Si la Logique classique avait donné à cette même propriété des jugements le nom de *nombre* ou d'*étendue*, Kant aurait pu tout aussi bien en conclure que l'étendue ou le nombre est un concept *a priori* de l'entendement. Cet exemple montre, en passant, quelle est la valeur du tableau des catégories.

repose sur la répétition *successive*, par suite sur le temps et sur la synthèse de l'homogène dans le temps (c'est-à-dire le nombre). On se demande alors comment on a jamais pu arriver à la notion de grandeur continue. Car de deux choses l'une : ou bien c'est le nombre qui « imite » la grandeur, suivant le mot de Pascal, et alors on ne peut expliquer la généralisation du nombre (les nombres fractionnaires, négatifs, irrationnels) qu'en supposant que nous avons une notion primitive et originale de la grandeur, indépendamment du nombre [1]; ou bien nous ne pouvons concevoir la grandeur que par l'intermédiaire (le *schème*) du nombre, et alors, pour expliquer la continuité de la grandeur, il faut définir les nombres fractionnaires, négatifs et irrationnels d'une manière autonome, sans faire appel à l'idée de grandeur ni à l'intuition spatiale. Cette dernière alternative est parfaitement possible [2], mais elle réfute par son existence même la thèse kantienne, car elle aboutit à faire reposer toute la mathématique sur des fondements analytiques. Tout au moins, elle oblige à abandonner cette conception empiriste du nombre, suivant laquelle il devrait nécessairement s'incarner dans des collections d'objets visibles et palpables, car celle-ci ne permet évidemment pas de dépasser les nombres entiers cardinaux.

En tout cas, nous pouvons de toute cette théorie retenir cet aveu : que la notion de grandeur est, en soi, distincte de l'espace et du temps, puisque ces deux formes d'intuition ne font que lui prêter des images ou des schèmes [3]. Or la mathématique est, selon Kant, la science de la grandeur en général; donc, comme telle, elle est indépendante de l'espace et du temps;

1. C'est ce que nous avons essayé de soutenir dans notre livre *De l'Infini mathématique*.

2. C'est la théorie de M. Russell, suivant laquelle toutes les espèces de nombres sont susceptibles d'une définition purement logique.

3. Dans les *Prolégomènes* (§ 20) Kant dit que « ce principe : « La ligne « droite est le plus court chemin d'un point à un autre », suppose que la ligne est subsumée sous le concept de grandeur, qui certainement n'est pas une simple intuition, mais qui, au contraire, a son siège dans le seul entendement.... » Comment cette thèse s'accorde-t-elle avec l'affirmation, que l'espace et le temps sont les seules grandeurs originaires, et que la mathématique pure ne s'applique qu'à l'espace et au temps?

elle ne repose pas sur l'intuition, mais sur le concept *a priori* de grandeur. Seulement, on peut en dire autant du nombre, car il résulte de la discussion précédente que, si le nombre trouve dans l'espace et dans le temps des schèmes appropriés, il est en lui-même un concept distinct et indépendant des deux formes d'intuition, par cela seul qu'il peut indifféremment être « construit » dans l'une et dans l'autre. Concluons donc que les sciences du nombre et de la grandeur sont des sciences rationnelles pures, indépendantes de l'intuition.

Kant lui-même a parfois considéré le nombre comme un concept intellectuel, non seulement dans sa *Dissertatio* de 1770, que l'on pourrait récuser[1], mais dans la *Critique de la Raison pure.* Il dit en effet ceci : « La synthèse pure, représentée d'une manière générale, donne le concept intellectuel pur. Mais j'entends par cette synthèse celle qui repose sur un principe d'unité synthétique *a priori* : ainsi notre numération (cela se remarque surtout dans les nombres élevés) est une *synthèse d'après des concepts*, parce qu'elle a lieu suivant un principe d'unité commun (par ex. le système décimal) » (A. 78, B. 104). Ce passage semble bien impliquer que le nombre, produit d'une synthèse pure, est un concept intellectuel pur ; ce qui paraît contredire la théorie du schématisme. On pourrait expliquer ce fait en disant que, lorsqu'il écrivait ces lignes, Kant n'avait pas encore élaboré la théorie du schématisme. Cependant, dans ce même passage, il parle du rôle de l'imagination, et lui attribue même toutes les synthèses en général (B. 103). Il est d'autant plus remarquable que dans ce passage il considère le nombre comme le produit d'une synthèse intellectuelle, et non d'une synthèse imaginative, et qu'il n'y soit aucunement question de l'intuition (du temps) qui, selon le schématisme, sert de base ou de matière à cette synthèse[2].

1. Voir plus haut, p. 252, note 1.

2. Cette remarque a été faite par Michaelis, *Ueber Kant's Zahlbegriff*, p. 7. Le même auteur constate que, lorsque Kant, à propos du tableau des catégories, observe que la 3e catégorie de chaque classe résulte de la synthèse des deux premières *par un acte de l'entendement*, il prend pour exemple le concept de nombre, qui, dit-il, « appartient à la catégorie de

L'Algèbre.

Kant reconnaît d'ailleurs que la mathématique n'a pas seulement pour objet *des* grandeurs concrètes, comme celles qu'étudie la Géométrie, mais aussi *la* grandeur pure, en faisant abstraction de tout objet; et c'est là, selon lui, l'office de l'Algèbre (B. 745). Il semble donc admettre que la grandeur est quelque chose de supérieur aux formes de l'intuition, et par conséquent d'intellectuel; cela dément tout au moins cette assertion, que l'espace et le temps sont les *seules* grandeurs originaires (B. 753). Mais il essaie de sauver sa doctrine en soutenant que l'Algèbre, elle aussi, procède par construction de concepts; seulement, ce n'est plus une construction « ostensive ou géométrique » qui porte sur les objets, c'est une construction « symbolique » ou « caractéristique », qui porte sur les signes algébriques (B. 745, 762). Il y a là une exagération manifeste : car, en admettant qu'il soit indispensable (et non simplement commode) de représenter les concepts par des signes, on ne peut pas appeler cela une construction de ces concepts, ni en conclure qu'ils sont intuitifs de leur nature. C'est tout bonnement confondre le signe avec la chose signifiée[1]. On peut représenter même des rapports logiques par des signes analogues aux signes algébriques (dans l'Algèbre de la Logique); il ne s'ensuit pas que ces rapports ne puissent être pensés qu'au moyen de l'intuition. Nous avons vu Kant lui-même figurer la composition d'un concept par la formule symbolique $a+b$; faudra-t-il en conclure que cette composition est une synthèse intuitive? Il réfute donc sa propre théorie en la poussant à l'extrême, car, en raisonnant de cette manière, il n'y a aucune notion, aucune relation dont on ne puisse prouver qu'elle est fondée sur l'intuition. Toutes nos idées ne se traduisent-elles pas par des mots, et ces mots sont-ils autre

de *totalité* » (*Critique*, § 11; B. 111). Il semble ressortir de là encore que le nombre est un concept purement intellectuel.

1. R. Seydel (*op. cit.*) soutient avec raison que Kant confond ici le processus psychique avec le contenu logique, et que les vérités de l'Algèbre portent, non sur les signes, mais sur les idées qu'ils représentent.

chose que des signes visibles ou audibles, qui « construisent » nos idées dans l'espace et dans les temps?

Sans doute, Kant distingue les mots des signes algébriques, en disant qu'en philosophie on ne raisonne pas sur les mots, tandis qu'en Algèbre on raisonne sur les signes et on laisse de côté les objets signifiés jusqu'à la fin du raisonnement[1]. Mais il y a ici une confusion d'idées. Il n'est pas vrai qu'en Algèbre on raisonne sur les signes; on raisonne toujours sur les idées qu'ils représentent; et si l'on peut opérer mécaniquement avec eux, c'est à la condition d'avoir justifié une fois pour toutes les règles formelles des opérations, ce qui ne peut se faire qu'en considérant le sens réel de ces opérations et des signes eux-mêmes. Il est vrai qu'en un sens on fait abstraction de la nature des objets, mais c'est parce qu'elle est réellement indifférente et étrangère au raisonnement. En Algèbre, on ne s'inquiète pas de savoir si les lettres représentent des nombres entiers ou fractionnaires, de même qu'en Arithmétique (pure, non appliquée) on ne s'inquiète pas de savoir si un nombre représente une collection, ou une longueur, ou un poids, et de même qu'en Géométrie on ne s'inquiète pas de savoir si un solide est en bois ou en métal; ce sont là des abstractions essentielles à chacune de ces sciences, par lesquelles on dépouille les notions qui en sont l'objet spécial de toute immixtion d'éléments étrangers. Mais il n'en résulte pas qu'en Algèbre on fasse abstraction même du nombre général ou de la grandeur, qui en est l'objet propre, et qui est le contenu même des formules algébriques. Lors donc que dans un problème d'Algèbre on fait abstraction de la nature particulière des grandeurs que l'on traite, ce n'est pas pour vider les symboles et les formules de tout contenu, mais pour les réduire à leur contenu essentiel, qui est l'idée de grandeur en général.

Enfin Kant attribue au « calcul littéral » (comme il appelle assez improprement l'Algèbre) une vertu d'infaillibilité toute spéciale, qui serait due à ce qu'on y raisonne uniquement

1. *Untersuchung über die Deutlichkeit...*, 1re considération, § 2 (1764).

sur des signes sensibles, qui soulagent la mémoire et l'attention et garantissent contre toute omission et tout oubli. Les mots, au contraire, ne peuvent pas rendre le même service : car on ne peut les manier sans penser plus ou moins à leur sens; et alors on est toujours exposé à confondre ou à altérer leurs significations. Ces avantages du symbolisme algébrique sont réels, mais ils ne constituent pas un argument en faveur de la thèse kantienne : et la preuve en est qu'ils ont été reconnus par des rationalistes tels que Descartes et Leibniz. Celui-ci surtout considérait si bien le calcul algébrique comme une méthode d'infaillibilité, qu'il voulait l'étendre à toute espèce de déduction, et constituer une Caractéristique universelle qui fût un « juge des controverses ». Il vantait, bien plus fortement que Kant, le secours que la pensée tire de l'emploi de signes « commodes et appropriés », sans pour cela tomber dans le nominalisme et réduire l'Algèbre, la Mathématique et la Logique elle-même à un pur jeu de symboles dénués de sens. Ce qui fait la supériorité du calcul algébrique sur le raisonnement verbal, ce n'est pas que dans le premier on raisonne sur les signes et dans le second sur les idées; c'est que dans le premier les signes correspondent à des idées claires et bien définies, tandis que dans le second les signes, c'est-à-dire les mots, correspondent à des idées confuses, flottantes et équivoques, que l'usage vulgaire y associe d'ordinaire. Le signe est simplement un moyen d'identifier un concept précis et rigoureusement défini; et le mot rendrait le même service, à la condition que son sens fût lui aussi bien défini, et qu'on ne lui en attribuât jamais d'autre. Il ne faut donc pas attribuer aux signes une vertu quasi mystérieuse qui garantisse sûrement de l'erreur; on commet des fautes de calcul aussi bien que des fautes de raisonnement, ce qui n'empêche pas le calcul, comme le raisonnement, de donner la certitude et d'être théoriquement infaillible. Il est étrange de voir Kant faire consister, comme un simple empiriste, « l'évidence » dans la « certitude intuitive », faire appel au témoignage des « yeux » pour « préserver toutes les déductions de l'erreur », et ne reconnaître comme

démonstrations que celles qui s'appuient sur l'intuition. Ou bien il y a là une simple question de mots, c'est-à-dire une définition nominale et arbitraire du mot *démonstration*; ou bien c'est une erreur palpable, car on ne peut nier qu'il n'y ait des démonstrations purement logiques et intellectuelles, et Kant ne serait sans doute pas allé jusqu'à soutenir que la valeur du syllogisme est fondée sur l'intuition.

Les jugements géométriques.

Il nous reste à discuter la théorie de Kant au sujet de la Géométrie. S'il y a une science qui paraisse reposer sur l'intuition, c'est bien celle-là, puisque c'est la science de l'espace; aussi bien des mathématiciens-philosophes, qui considèrent l'Analyse comme une science pure et *a priori*, regardent-ils la Géométrie comme une science empirique ou du moins intuitive. Cela prouve en tout cas qu'il y a lieu de séparer la Géométrie de la science générale des grandeurs, et qu'on ne peut pas conclure de l'une à l'autre.

Ici encore, c'est par des exemples que Kant essaie d'établir sa thèse. Nous serons donc obligé de les examiner tour à tour. Pour montrer que les jugements géométriques sont synthétiques, il cite cette proposition : « La ligne droite est la plus courte entre deux points. » En effet, dit-il, mon concept de droite ne contient rien de quantitatif, mais seulement une qualité. Le concept quantitatif de « le plus court » ne peut donc être contenu dans le sujet, ni en être tiré par analyse; il ne peut lui être adjoint que par une synthèse fondée sur l'intuition.

Demandons-nous d'abord quelle est pour Kant la valeur méthodologique de la proposition citée : est-ce une définition, un axiome ou un théorème? Il semble que ce soit un axiome, car il parle de « principe » (Grundsatz)[1]. Eh bien! ce n'est

1. On sait que pour Legendre cette proposition est la définition de la ligne droite. Il n'en est pas ainsi pour Kant, car il paraît considérer comme définition de la ligne droite cette propriété, qu'il n'y en a qu'une entre deux points donnés (*Rechtslehre*, Introduction, § E).

nullement un axiome, mais un théorème démontrable et démontré [1]. Ce ne peut pas être un principe, car cette proposition suppose que l'on sait ce qu'est la longueur d'une ligne quelconque. Or la longueur d'une ligne courbe ne peut se définir que dans la Géométrie analytique et infinitésimale, et elle se définit *en fonction de la ligne droite.* C'est donc *par définition* que la ligne droite est le prototype ou l'étalon des longueurs. Kant se place au point de vue du sens commun empiriste, qui *croit voir* la longueur d'une courbe, parce qu'il *imagine* un fil souple et inextensible appliqué sur cette courbe, puis tendu sous forme de ligne droite. Mais cette *intuition* n'intervient nullement comme principe scientifique en Géométrie, et pour cause : car c'est seulement lorsqu'on a défini la longueur d'une courbe qu'on peut *concevoir* clairement qu'un fil *conserve sa longueur* en se déformant. Par conséquent, tout appel à l'intuition, en cette matière, constituerait un cercle vicieux.

On ne peut donc pas dire que la ligne droite soit par elle-même et primitivement une quantité; dans tous les cas, du reste, ce n'est pas la ligne droite (illimitée) qui peut être une quantite, c'est le *segment* fini que l'on découpe sur elle [2]. On ne peut pas non plus dire que la ligne droite est une qualité, comme le rouge ou le chaud. Tout ce qu'on peut dire, au point de vue de la grammaire (qui est celui de la logique d'Aristote),

1. Nous avons déjà traité cette question dans la *Revue de Métaphysique*, t. I, p. 77 (janv. 1893). Pour démontrer que la ligne droite est plus courte que toute ligne brisée ayant les mêmes extrémités, on démontre que, dans un triangle, un côté quelconque est plus petit que la somme des deux autres. Ce théorème, à son tour, repose sur celui-ci : Dans un triangle, à un plus grand angle est opposé un plus grand côté. Et celui-ci enfin dérive de cet autre : Dans un triangle, un angle extérieur est plus grand que chacun des angles intérieurs non adjacents, lequel est indépendant du postulatum d'Euclide (V. Niewenglowski et Gérard, *Cours de Géométrie élémentaire*, t. I, p. 27, 31, 32. Paris, Naud, 1898). Tous ces théorèmes se démontrent, non par un simple appel à l'intuition, mais par les définitions de l'inégalité et de la somme des segments et des angles. Que ces définitions impliquent des éléments intuitifs, ce n'est pas là présentement la question : il suffit que, ces définitions une fois posées, toutes les propositions énoncées s'en déduisent logiquement.

2. Zimmermann (*op. cit.*) a déjà observé que ce n'est pas la droite tout entière qui est la plus courte, mais bien la partie de droite comprise entre deux points. C'est ce qu'on appelle aujourd'hui *segment*

c'est que la *rectitude* est une qualité, et que la droite est le *sujet* de cette qualité. Mais, à vrai dire, ces « catégories » scolastiques n'ont pas de sens, appliquées aux entités géométriques. En réalité, la ligne droite est une *figure* : au point de vue projectif (qu'on peut appeler, si l'on veut, qualitatif) et considérée dans sa totalité, elle est absolument infinie, elle comprend tous les points situés sur sa *direction*. Elle n'est pas une grandeur; mais elle devient le support d'une série de grandeurs (les longueurs) lorsque l'on y fixe des points, et qu'on définit entre eux certaines relations appelées *distances*. On dira, par exemple, que, si le point B est entre A et C, la distance AC est *plus grande* que les distances AB et BC, et qu'elle est leur *somme*. Moyennant ces définitions de l'inégalité et de la somme, les distances deviennent des grandeurs mesurables. Y a-t-il là une « synthèse » de la qualité et de la quantité? Nous n'en savons rien; il y a là simplement la *définition* d'une espèce de grandeurs. Toujours est-il que cette grandeur ne caractérise pas la ligne droite comme telle : ce n'est pas de la ligne droite *tout entière*, dans son infinité et son unité indivise, qu'on peut dire qu'elle est « la plus courte[1] »; c'est seulement d'un segment de droite limité par deux points[2]. Et quand on dit que ce segment est plus court que toute ligne brisée ayant les mêmes extrémités, on compare, au fond, un segment de droite à un autre segment de droite, et l'on affirme que le premier est ou peut être contenu dans le second. La relation d'inégalité (*plus grand que*) se trouve donc définie par la relation de tout à partie, et le théorème en question n'est qu'une application de cette proposition : « Le tout est plus grand que la partie », que Kant considérait comme un principe, et même comme un principe analytique. Ainsi, lorsque

1. Aussi cet axiome ou postulat : « Toute ligne droite peut être prolongée », que Kant considère comme synthétique, est-il au contraire tout ce qu'il y a de plus analytique : car la ligne droite doit être conçue primitivement dans sa totalité infinie. La conception vulgaire de la droite comme limitée a évidemment une origine empirique et pratique qui lui ôte toute valeur scientifique.

2. Cf. Zimmermann, *op. cit.*

Kant dit que ce théorème : « Dans un triangle la somme de deux côtés est plus grande que le troisième » ne peut jamais se déduire des concepts de ligne et de triangle (B. 39) [1], il a parfaitement raison, car il n'y est pas question, en réalité, de ligne ni de triangle; ce théorème peut en effet se formuler ainsi : « Étant donnés trois points quelconques, la distance de deux d'entre eux est plus petite que la somme de leurs distances au troisième. »

Dans son opuscule sur les *Progrès de la Métaphysique* (1791), Kant donne comme exemple de jugement synthétique le suivant : « Toute figure à trois côtés a trois angles », « car, dit-il, bien que, quand je pense trois lignes droites comme enfermant un espace, il soit impossible de ne pas penser en même temps par là trois angles, je ne pense pourtant pas du tout dans ce *concept* du trilatère l'inclinaison des côtés l'un par rapport à l'autre, c'est-à-dire que je ne pense pas réellement le concept d'angle *en lui* » [2]. Comme on l'a déjà remarqué [3], c'est là une erreur : le concept d'angle est contenu dans la notion de droites *qui se coupent* : or, comment pourraient-elles enfermer un espace, si elles ne se rencontraient pas? De deux choses l'une : ou bien l'on conçoit le triangle à la manière classique, comme une figure finie, et alors on doit le définir : la figure formée par 3 droites qui se coupent 2 à 2; dès lors, en vertu d'un théorème de Combinatoire, ces 3 droites ont 3 intersections, et par suite déterminent 3 angles. Ou bien l'on conçoit le triangle, au sens projectif, comme l'ensemble de 3 droites situées dans un même plan : et alors deux d'entre elles peuvent être parallèles, ou même toutes les trois [4]. Mais en même

1. Cf. *Rechtslehre*, § 19 : « Dass ich, um ein Dreieck zu machen, drei Linien nehmen müsse, ist ein analytischer Satz; dass deren zwei aber zusammengenommen grösser sein müssen, als die dritte, ist ein synthetischer Satz. »

2. Éd. Hartenstein, t. VIII, p. 582.

3. Richard Manno, *Wesen und Bedeutung der Synthesis in Kant's Philosophie*, ap. *Zeitschrift für Philosophie u. phil. Kritik*, t. 94, p. 29-88 (1888).

4. D'ailleurs, comme l'a remarqué Michaelis (*op. cit.*), il est absurde de décomposer le concept de triangle en deux concepts, celui de *trois* et celui de *ligne droite*, comme si ces deux concepts étaient simplement juxtaposés (combinés par la multiplication logique). Or c'est ce que fait

temps on doit admettre que 2 droites parallèles ont un point commun à l'infini, et par suite 3 droites quelconques situées dans un même plan ont toujours 3 points communs deux à deux, et déterminent ainsi 3 angles (qui peuvent être nuls). Donc, dans tous les cas, la notion des angles est bien contenue dans la notion des 3 droites, ou dans celle du « trilatère »[1]. Ailleurs Kant prétend que du concept de deux lignes droites on ne peut pas déduire logiquement que deux droites n'enferment pas un espace (B. 65; cf. B. 299); il oublie que c'est là pour lui la définition même de la droite, à savoir qu'il n'y en a qu'une qui passe par deux points, et que par suite cette propriété dérive analytiquement du concept de droite[2]. De même, il affirme que ce jugement : « Trois points sont situés dans un même plan » est synthétique (B. 761); or il fait partie de la définition même du plan. Tous ces exemples prouvent que la distinction des jugements analytiques et synthétiques n'était pas plus claire ni plus solide, pour Kant lui-même, en Géométrie qu'en Arithmétique.

Kant dans le passage suivant : « Il (le philosophe) peut réfléchir sur ce concept (de triangle) aussi longtemps qu'il veut, il n'en tirera rien de nouveau. Il peut décomposer et rendre distinct le concept de ligne droite, ou celui d'un angle, ou celui du nombre trois, mais non parvenir à d'autres propriétés qui ne se trouvent nullement dans ces concepts. » (A. 716, B. 744.) C'est toujours la même application aux concepts mathématiques de la Logique traditionnelle qui n'est pas faite pour eux. MICHAELIS observait déjà que la méthode mathématique échappe complètement aux prises de la Logique classique, et que Kant a été dominé, dans sa conception de l'Arithmétique, par « des préjugés logiques ».

1. Chose curieuse, Kant paraît l'avouer lui-même ailleurs : « Qu'on donne à un philosophe le concept d'un triangle .. Il n'a rien que le concept d'une figure enfermée entre trois lignes droites, et en elle (an ihr) le concept d'autant d'angles. » (B. 744.) Il est plus explicite encore dans le passage suivant : « Poser un triangle et en supprimer les trois angles, c'est contradictoire » (B. 622).

2. Il dit ailleurs qu'il n'y a aucune contradiction dans la notion d'une figure enfermée par deux droites (B. 268); or cette notion est contradictoire avec la notion même de droite. Dans les *Prolégomènes* (Résolution générale du problème, fin) il cite comme jugement synthétique cette proposition : « Entre deux points on ne peut mener qu'une ligne droite », qu'il prend ailleurs pour définition de la droite (v. p. 278, note 1).

LES DÉMONSTRATIONS GÉOMÉTRIQUES.

Enfin, pour prouver que les démonstrations géométriques reposent sur l'intuition, Kant considère le théorème connu : « La somme des 3 angles d'un triangle est égale à 2 droits »[1], et il constate que pour le démontrer on a recours à une construction; celle-ci a pour but de produire 3 angles qui soient, d'une part, égaux aux 3 angles du triangle, et dont, d'autre part, la somme soit intuitivement égale à 2 droits (B. 744).

Il semble donc que, selon Kant, on ne puisse pas démontrer un théorème de Géométrie sans construire une figure et mener des lignes auxiliaires, et que toute construction implique nécessairement un appel à l'intuition. Or ni l'une ni l'autre de ces propositions n'est justifiée. Pour commencer par la seconde, une démonstration géométrique n'est valable que si elle ne repose pas sur un appel à l'intuition : tout le monde sait qu'il ne faut jamais invoquer les propriétés apparentes de la figure, et que l'on peut commettre ainsi des sophismes dont quelques-uns sont classiques[2]. Il en est de même des constructions auxiliaires : on ne doit pas mener une ligne, fixer un point et invoquer ensuite leur position, sans démontrer que ces éléments existent, et sont bien situés là où on les a figurés[3]. D'ailleurs, quand on parle de construire telle ou telle figure, c'est là une façon de parler anthropomorphique, une métaphore empruntée à la pratique : les figures que l'on trace, c'est-à-dire que l'on réalise empiriquement, existent déjà idéalement, en tant qu'elles sont prédéterminées par les données de la question. Quand on dit : « Joignons les deux points A et B », cela signifie

1. Théorème qui, par un contraste piquant, était couramment cité par les rationalistes (Descartes, Spinoza) comme le type de la certitude *logique*.

2. Voir des exemples de ces sophismes dans ROUSE BALL, *Récréations et problèmes mathématiques*, trad. Fitz-Patrick, p. 61 sqq. (Paris, Hermann, 1898).

3. Voir par exemple la démonstration de ce théorème : « Dans tout triangle un angle externe est plus grand que chacun des angles internes non adjacents », dans ENRIQUES et AMALDI, *Elementi di Geometria*, p. 61 (Bologna, 1903)

en réalité : « Les deux points A et B déterminent une droite, en vertu de la définition même de la droite. » Quand on dit : « Prolongeons la droite AB », c'est là un accident empirique de la figure tracée matériellement, car la droite AB est essentiellement infinie. De même enfin, quand, 2 droites orthogonales étant données, on parle de mener par l'une d'elles un plan perpendiculaire à l'autre, on ne fait que réaliser ce qui était impliqué dans l'hypothèse : car 2 droites sont orthogonales, *par définition*, lorsque l'une d'elles est contenue dans un plan perpendiculaire à l'autre (on démontre que cette propriété est réciproque); par conséquent, le plan en question existait déjà, *par définition*. Il en est de même partout : on ne peut construire (utilement et valablement) aucune figure qui ne soit déjà déterminée par les données ou les définitions. On ne fait que réaliser empiriquement des éléments préformés de la figure idéale; et comme c'est sur celle-ci qu'on raisonne, on ne lui ajoute rien à proprement parler; on ne construit, on ne crée aucun élément, on le rend seulement sensible à mesure qu'on en a besoin. C'est comme si l'on repassait à l'encre un dessin esquissé en traits presque invisibles au crayon. Aussi, tout ce qu'on dit être vrai « par construction » peut être dit vrai « par hypothèse » ou « par définition [1] ».

Ainsi, lors même que les constructions seraient indispensables, elles n'impliqueraient pas un appel à l'intuition. Mais elles ne sont pas si indispensables qu'on le croit, d'après les « éléments » de la Géométrie synthétique. On a depuis longtemps critiqué le caractère artificiel des démonstrations d'Euclide [2], parce qu'elles s'appuient sur des constructions parfois

1. Comme nous l'avons remarqué (p. 144, et 160, note 1) les postulats et théorèmes existentiels servent précisément à garantir l'existence de certaines entités determinées par certaines autres. Cf. ce que nous avons dit des définitions génétiques (p. 192, note 2).

2. On sait qu'Arnauld, dans la *Logique de Port-Royal* (IV, viii), soumet la « méthode des Géomètres » (c'est-à-dire celle d'Euclide) à une critique sévère. On sait moins qu'il a composé des *Nouveaux Éléments de Géométrie* (1667) où il s'est efforcé de remédier aux défauts de cette méthode, et notamment de concilier l'enchaînement logique des propositions avec leur ordre naturel. Cf. Karl Bopp, *Antoine Arnauld als Mathematiker*, ap. *Abhandlungen zur Geschichte der math. Wiss.*, t. XIV.

compliquées et en apparence arbitraires, sur un échafaudage de lignes auxiliaires, qui sortent de la figure donnée et y ajoutent des éléments tout à fait étrangers; il semble alors que l'on ne puisse passer de l'hypothèse à la conclusion que par de longs circuits et par des efforts d'imagination; de telles démonstrations sont parfois si détournées qu'elles paraissent en effet être, non pas des raisonnements réguliers et suivis, mais des tours de passe-passe[1]. Mais on peut généralement leur substituer des démonstrations beaucoup plus simples et plus directes, fondées sur les propriétés intrinsèques de la figure donnée, et qui le plus souvent n'exigent pas le tracé d'une seule ligne auxiliaire. Pour opposer exemple à exemple, nous croyons devoir citer ici une démonstration de ce genre. Nous l'empruntons à un ouvrage d'enseignement élémentaire, conçu en dehors de tout esprit de système, et inspiré uniquement par le souci de la rigueur logique en même temps que de l'ordre et de la clarté pédagogiques[2].

« *Quand deux plans sont perpendiculaires, toute perpendiculaire à leur intersection dans l'un est perpendiculaire à l'autre.*

« Car cette droite peut être considérée comme l'intersection du premier plan par un troisième qui serait perpendiculaire sur l'intersection des proposés (95), par suite perpendiculaire sur le second (107, 111). »

Cette démonstration, rédigée en une phrase, ne fait appel à aucun fait d'intuition : elle n'est accompagnée d'aucune figure, et, comme on voit, elle ne demande aucune construction. Elle se réfère simplement à trois propositions antérieures qu'elle se borne à rapprocher et à combiner. Pour la comprendre, il est nécessaire de connaître ces propositions :

« 95. Par un point d'un plan contenant une droite, on ne peut mener qu'une perpendiculaire à cette droite : et cette perpendiculaire est l'intersection du plan donné et du plan per-

1. Telle est par exemple la démonstration classique du théorème de Pythagore, qui ressemble à un jeu de patience ou à un casse-tête chinois.
2. Ch. Méray, *Nouveaux Éléments de Géométrie*, n° 113 (Dijon, Jobard, 1903).

pendiculaire à la droite donnée passant par le point donné.

« 107. Deux plans sont perpendiculaires quand l'un d'eux contient une droite perpendiculaire à l'autre.

« 111. Quand deux plans qui se coupent sont perpendiculaires à un même troisième, leur intersection lui est perpendiculaire. »

Revenons à la démonstration pour l'analyser et la développer. L'hypothèse comprend : deux plans perpendiculaires, soient P et Q; leur intersection, soit la droite D; et la droite E perpendiculaire à D dans P. La droite E est (en vertu de 95) l'intersection du plan P par un plan R perpendiculaire à la droite D. Mais (en vertu de 107) le plan R, perpendiculaire à une droite D du plan Q, est perpendiculaire à Q. Les deux plans P et R sont perpendiculaires à Q, donc (en vertu de 111) leur intersection E est perpendiculaire à Q; c. q. f. d.

Nous nous abstenons à dessein de faire une figure, car elle est absolument inutile. On n'a pas besoin de *voir* les plans P, Q, R, et les droites D, E; il suffit de savoir quelles sont leurs relations, et de leur appliquer pour ainsi dire automatiquement les trois propositions 95, 107 et 111. C'est une démonstration verbale, c'est-à-dire formelle. On pourrait dépouiller de toute signification géométrique les entités D, E, P, Q, R, ainsi que les relations de perpendicularité et d'appartenance qui les unissent; le raisonnement serait le même, et il serait tout aussi valable, du moment que les trois propositions 95, 107 et 111 sont supposées vraies [1]. Cet exemple

1. On peut le prouver en représentant cette démonstration sous une forme symbolique (très grossière). Désignons par ε la relation d'une droite à un plan où elle est contenue, et par $\perp$ la relation de perpendicularité (soit entre 2 droites, soit entre 2 plans, soit entre une droite et un plan). Les hypothèses sont :

(1) $P \perp Q$ (2) $D \varepsilon P$ (3) $D \varepsilon Q$ (4) $E \varepsilon P$ (5) $E \perp D$.

La proposition 95 se traduit par l'implication :

$$D \varepsilon P . E \varepsilon P . E \perp D . \supset . E \varepsilon R . R \perp D$$

La proposition 107 se traduit par l'implication :

$$R \perp D . D \varepsilon Q . \supset . R \perp Q$$

La proposition 111 se traduit par l'implication :

$$P \perp Q . R \perp Q . \supset : E \varepsilon P . E \varepsilon R . \supset . E \perp Q$$

On remarquera que, selon les règles de la méthode mathématique,

montre qu'une démonstration géométrique peut (et doit) être une déduction purement logique. Il convient d'ajouter que le théorème en question n'est nullement un corollaire (c'est-à-dire une conséquence immédiate d'un autre), et que la démonstration que nous venons de citer n'est pas une exception : la plupart des démonstrations contenues dans le même ouvrage ont le même caractère, et n'ont pas davantage recours à la figure ni à la construction.

Role de l'intuition en Géométrie.

Quant à cette assertion répétée de Kant, que la mathématique considère toujours le général dans le particulier, et même dans le singulier et le concret, elle n'est pas justifiée. Même dans la Géométrie synthétique, à laquelle elle paraît s'appliquer, si l'on trace une figure pour démontrer un théorème, on ne raisonne jamais sur les propriétés particulières de la figure, mais seulement sur ses propriétés générales, qui lui sont communes avec toutes les figures de même genre, visées par le théorème[1]. On n'invoque jamais, dans la démonstration, les propriétés intuitives de la figure particulière que l'on considère, mais seulement les propriétés qui résultent de sa définition ou de sa construction, c'est-à-dire des *hypothèses* du théorème. Kant dit que la mathématique représente « le général *in concreto* (dans l'intuition singulière).... par où tout faux pas

toutes les hypothèses ont été utilisées. Représentons-les en effet par leurs numéros et numérotons leurs conséquences ; la 1re implication est :

(2). (4). (5). ɔ. (6). (7) (A)

La 2e est : (7). (3). ɔ. (8) (B)

La 3e est : (1). (8). ɔ : (4). (6). ɔ. (9) (C)

Ainsi (2), (4) et (5) sont invoquées dans A, (3) dans B, et (1) dans C. De même, les conséquences intermédiaires ont été employées : (6) dans C ; (7) dans B ; (8) dans C. La conséquence (9) est la thèse à démontrer.

1. Les empiristes prétendent que la Géométrie ne démontre jamais ses théorèmes que sur des cas particuliers, et qu'on devrait ajouter à chaque théorème cette mention : « La même démonstration pourrait se répéter de toute autre figure analogue. » Mais si c'est *la même* démonstration, il est inutile de la répéter : et, d'ailleurs, elle ne peut être *la même* que si elle porte sur *la même* figure idéale et générale.

devient visible » (B. 763). Il y a là une équivoque. S'il s'agit de la méthode de l'Algèbre, il a raison de dire que les signes sensibles préservent de l'erreur, comme Leibniz l'avait déjà remarqué. Mais s'il s'agit de la méthode géométrique, les figures ne peuvent, tout au contraire, qu'induire en erreur; car la prétendue « évidence » intuitive peut dissimuler une faute de raisonnement ou un postulat. Cela prouve, en passant, qu'il n'y a aucune analogie entre ces deux sortes d'intuition. Ainsi l'intuition géométrique n'est pas, tant s'en faut, une garantie de vérité ou du moins de rigueur logique. On peut raisonner juste sur une figure inexacte ou même fausse; on peut mal raisonner sur une figure bien construite, car on peut invoquer une propriété vraie, mais *empirique*, qui ne résulte pas des définitions ou des hypothèses. Qu'est-ce à dire, sinon que l'intuition ne doit avoir aucune part réelle dans les raisonnements géométriques, et que ceux-ci, pour être rigoureux, doivent être purement logiques? Un appel à l'intuition (cette intuition fût-elle *a priori*) ne se distingue pas, en bonne méthode, d'une constatation empirique, et n'a pas plus de valeur. On peut déterminer le nombre π en mesurant le contour d'un cercle matériel; Archimède, dit-on, a trouvé la quadrature de la parabole en pesant des lames taillées suivant cette courbe; ce sont là des procédés évidemment étrangers à la méthode mathématique, mais ils ne le sont pas plus que ne le serait un appel à l'intuition[1].

Dira-t-on que les raisonnements géométriques portent, non

1. Nous avons déjà fait valoir contre Kant certains arguments que l'on emploie d'ordinaire contre les empiristes. C'est qu'en effet il n'y a pas de différence essentielle entre la thèse qui fait reposer les vérités géométriques sur l'intuition empirique et celle qui les fait reposer sur une intuition *a priori*. C'est toujours l'intuition qu'on invoque, c'est-à-dire la représentation singulière d'une figure unique et parfaitement déterminée. Kant lui-même nous autorise à assimiler les deux sortes d'intuition, quand il dit : « Je construis un triangle, en représentant l'objet correspondant à ce concept, soit par la seule imagination dans l'intuition pure, soit d'après celle-ci (l'imagination) sur le papier dans l'intuition empirique, mais les deux fois entièrement *a priori*, sans en avoir emprunté le modèle à une expérience quelconque » (B. 741). Nous avons donc le droit d'assimiler le triangle représenté dans l'imagination au triangle tracé sur le papier. (Cf. B. 65.)

sur des images, mais sur des schèmes? Cela résoudrait la difficulté, car, tandis que les images sont particulières, les schèmes sont généraux comme le concept lui-même; Kant dit que nos « concepts sensibles purs » (c'est-à-dire les concepts géométriques) reposent, non sur des images, mais sur des schèmes, parce qu'aucune image ne peut être adéquate au concept de triangle ni atteindre à sa généralité (B. 180). Mais, d'abord, cette théorie paraît difficile à concilier avec l'assertion répétée que la mathématique construit ses concepts *in concreto* (B. 743), qu'elle considère le général dans le *singulier* (B. 742). Cependant on lit au même endroit : « La figure singulière qu'on a dessinée est empirique, et cependant elle sert à exprimer le concept malgré sa généralité, parce que dans cette intuition empirique on ne regarde jamais que l'acte de la construction du concept, auquel sont tout à fait indifférentes bien des déterminations, comme la grandeur des côtés et des angles, et par suite on fait abstraction de ces diversités, qui ne changent pas le concept du triangle » (B. 742). Ce passage prouve que Kant a vu la difficulté, mais non qu'il l'ait résolue[1]. Car de deux choses l'une : ou bien l'on raisonne sur la figure singulière (dans l'intuition *a priori* ou empirique, peu importe), et alors le raisonnement manque complètement de généralité; ou bien on raisonne sur le schème *général* dont cette figure n'est qu'une

1. De même on peut trouver des passages où il semble reconnaître que l'entendement est la source des vérités géométriques, ou du moins que l'unité synthétique de l'espace est d'ordre intellectuel (B. 160, note; cf. *Prolégomènes*, § 38). Mais on ne voit pas comment cette concession à l'intellectualisme est compatible avec sa thèse constante, que les jugements synthétiques *a priori* ne sont possibles qu'en tant que fondés sur une *intuition*. Cette concession même vient de ce que, selon Kant, la géométrie considère l'espace géométrique, non comme une simple forme de l'intuition, mais comme un objet (B. 160, note); mais elle paraît contredite par un autre passage : « L'espace est simplement la forme de l'intuition externe (intuition formelle), mais non un objet réel, qui peut être perçu extérieurement » (B. 457, note). Toutes ces inconséquences proviennent de la confusion perpétuelle (fort bien mise en lumière par M. Vaihinger) entre la forme de l'intuition et l'intuition pure (B. 160). Il n'y a en effet aucune raison pour que la forme de l'intuition soit elle-même une intuition. On pourrait peut-être résoudre par là les difficultés de la doctrine kantienne : l'espace et le temps seraient des formes d'intuition, mais des formes intellectuelles, et non sensibles.

image, et alors on ne peut plus dire que la mathématique ne considère le général que dans le particulier et le concret. On ne peut même plus dire qu'elle le considère dans l'intuition, car un schème est un procédé général, une règle de construction, et non une construction toute faite, qui serait, de l'aveu de Kant, « un objet *singulier* » (B. 741); et alors nous ne voyons pas en quoi il se distingue du concept, dont il partage la généralité et l'indifférence à l'égard des déterminations particulières sans lesquelles il n'y a pas d'intuition[1]. C'est le concept lui-même qui constitue cette règle générale de construction, étant donné surtout que les concepts géométriques ne sont jamais définis *per genus et differentiam*, mais le plus souvent *per generationem.* Tout produit de l'imagination est particulier, et l'on ne peut imaginer un triangle sans lui assigner une forme déterminée. Si le schème est général, il ne peut être un produit de l'imagination. Le schème est donc un intermédiaire au moins inutile entre le concept et l'image.

Dans tous les cas, si l'intuition intervient, à titre de simple auxiliaire, dans la Géométrie synthétique, elle n'intervient presque plus dans la Géométrie analytique, encore moins dans la Géométrie projective et les divers Calculs géométriques. En Géométrie analytique, on raisonne au moyen d'équations générales qui représentent indifféremment toutes les figures d'une même espèce, et si l'on a recours à l'intuition pour établir ces équations, on s'en passe complètement pour toutes les déductions qu'on en tire. En Géométrie projective, on raisonne directement sur les figures, mais en les concevant dans toute leur généralité, et en faisant abstraction de toutes leurs particularités intuitives; par exemple, on raisonnera sur la conique en général, sans avoir à spécifier l'ellipse, la parabole et l'hyperbole, et même sans pouvoir les distinguer. De même, on ne distinguera pas des droites ou des plans parallèles de droites

1. Rappelons la définition kantienne de l'intuition : c'est le mode de connaissance qui se rapporte immédiatement aux objets, et par lequel ils nous sont donnés individuellement. Cf. *Logik*, § 1 : « Die Anschauung ist eine *einzelne* Vorstellung (*repræsentatio singularis*), der Begriff eine *allgemeine*... oder *reflectirte* Vorstellung... »

ou plans qui se coupent, c'est-à-dire qu'on néglige et que l'on considère comme indifférents ces faits d'intuition auxquels la méthode synthétique d'Euclide s'attache presque exclusivement. Enfin, dans les divers Calculs géométriques, on définit même les figures fondamentales comme des combinaisons algébriques de points (c'est-à-dire d'éléments indéfinissables), et l'on raisonne sur elles au moyen d'algorithmes formels analogues à celui de l'Algèbre. Dans toutes ces doctrines, on n'invoque jamais, dans les démonstrations, les propriétés intuitives des figures, et l'on n'emploie jamais ces constructions auxiliaires qui sont, en Géométrie synthétique, comme les béquilles du raisonnement; on a pu écrire des traités entiers suivant ces méthodes sans une seule figure, ce qui montre bien que l'on n'a pas besoin de l'intuition, et qu'on ne raisonne plus sur des cas singuliers[1].

Dans les *Prolégomènes* (§ 12), Kant invoque ce fait, que l'égalité géométrique consiste en dernière analyse dans la superposition, qui est un phénomène d'intuition. Il oublie que,

1. Il est intéressant de rappeler ici l'opinion de SCHOPENHAUER sur le même sujet, car elle est manifestement dérivée de la doctrine de Kant. Schopenhauer estime que la Géométrie devrait renoncer à la prétention de démontrer ses théorèmes, et imiter l'Arithmétique, qui repose tout entière sur l'intuition du temps, sur l'acte du dénombrement. (Cf. *Quadruple racine du principe de raison suffisante*, § 39 : « Toute proposition géométrique devrait être ramenée à la perception intuitive, et la démonstration consisterait à faire bien clairement ressortir l'enchaînement qu'il s'agit de saisir. ») Il trouve que la méthode logique des géomètres confine à la « niaiserie » : quelle manie étrange de chercher une certitude médiate pour ce qui offre une certitude immédiate! Pour lui, la Géométrie non euclidienne est un fruit et une preuve de cet abus de la Logique, de cette rage de tout démontrer, de déduire chaque chose d'autre chose. Si l'on cherche en vain une démonstration du postulatum d'Euclide, c'est qu'on ne peut rien trouver de plus évident. La Géométrie non euclidienne est la parodie et la caricature de la méthode d'Euclide (*Le monde comme volonté et comme représentation*, t. II, ch. XIII; cf. t. I, § 15). Ces attaques contre la méthode des Géomètres et contre la géométrie non euclidienne jugent Schopenhauer comme mathématicien. Mais son exemple nous autorise à dire que sa conception de la Géométrie, comme fondée sur l'évidence intuitive directe, est « la parodie et la caricature » de celle de Kant. On en peut dire autant de sa conception de l'Arithmétique : « Tout nombre présuppose les nombres qui le précèdent, comme ses raisons d'être : je ne puis arriver au nombre *dix* que par tous les nombres qui le précèdent... » (*Quadruple racine*, § 38), que SEYDEL a fort bien réfutée (*op. cit.*).

là où l'on emploie cette méthode (dont les géomètres modernes les plus rigoureux s'abstiennent totalement), on ne se borne pas à constater *de visu* la superposition; on démontre qu'elle *doit* avoir lieu, c'est-à-dire que les deux figures à superposer sont déterminées d'une manière univoque par les éléments donnés : de sorte que de l'identité de ces éléments on peut conclure l'identité des figures totales. Or cette détermination univoque repose sur la définition même des figures; par exemple, du fait que deux droites ont deux points communs, on conclura qu'elles coïncident : ce n'est pas là une constatation intuitive, mais une conséquence logique de la définition de la droite; et ainsi de suite [1].

Le paradoxe des objets symétriques.

Mais ici on peut nous objecter le fameux paradoxe des objets symétriques [2]. Il y a des figures (à 3 dimensions) qui sont « semblables et égales » dans tous leurs éléments, et pourtant « incongruentes », c'est-à-dire qui ne peuvent coïncider : tels sont les triangles sphériques opposés, les hélices dextrorsum et sinistrorsum, les deux côtés du corps humain, les deux oreilles, les deux mains, etc. Cette différence, selon Kant, ne peut être définie ni expliquée par aucun concept, mais seulement par l'intuition, et elle prouve la nature intuitive des figures géométriques et de l'espace lui-même.

Il n'est peut-être pas inutile de remarquer, d'abord, que ce paradoxe avait été invoqué auparavant par Kant pour prouver une thèse toute différente, et presque contraire, celle de l'espace absolu [3]. La diversité des objets symétriques ne pourrait s'expliquer par leurs relations internes (qui sont identiques), et ne serait concevable que par leur rapport à l'espace absolu [4].

1. Cf. les recherches de Leibniz *de determinantibus et determinatis* et *de Unico* (V. *La Logique de Leibniz*, ch. VII, § 10).

2. *Dissertation*, III, 15, C (1770); *Prolégomènes*, § 13; *Metaph. Afangsgründe der Naturwissenschaft*, ch. I, Déf. II, scolie III.

3. *Von dem ersten Grunde des Unterschiedes der Gegenden im Raume* (1768).

4. Comme le remarque M. Vaihinger (II, 522, 526), cette idée reparaît

Ainsi du même fait il a conclu d'abord à la réalité, puis à l'idéalité de l'espace. Cela fait présumer que, dans les deux cas ou tout au moins dans l'un d'eux, l'argument n'est pas probant [1]. Il serait intéressant de rechercher comment Kant a pu employer le même argument tour à tour en des sens si divers. Nous croyons qu'on en trouverait l'explication dans son opposition à Leibniz : dans le premier cas, il soutient la thèse newtonienne de l'espace absolu contre la thèse leibnizienne de la relativité de l'espace; dans le second cas, il soutient la nature intuitive de l'espace contre l'intellectualisme de Leibniz, qui y voyait un ordre purement intelligible. Mais cette question historique et psychologique sort de notre sujet. Il s'agit de savoir quelle est la valeur de l'argument tel qu'il est présenté dans les *Prolégomènes*.

Nous croyons que l'argument pèche par la prémisse : « il n'y a pas là de différences intrinsèques qu'un entendement quelconque puisse seulement concevoir ». Cette prémisse suppose qu'il n'y a pas entre les éléments des figures d'autres relations que des relations *de grandeur* : or c'est là une erreur. Il y a aussi des relations *d'ordre*, et ce sont ces relations d'ordre qui diffèrent, ou plutôt qui sont inverses dans les figures symétriques. Dira-t-on que ce sont des relations purement intuitives et logiquement indéfinissables? Ce serait encore une erreur : car toutes les relations d'ordre peuvent se définir au moyen de la Logique des relations. Au fond, deux ordres *inverses* l'un de l'autre correspondent à des relations *converses* l'une de l'autre; et la conversion des relations est une opération logique absolument indépendante de l'intuition [2]. Il y a donc une différence parfaitement intelligible et purement logique entre deux figures symétriques : c'est ce que Kant néglige quand il dit qu'elles sont « semblables et égales » dans toutes leurs parties et dans

dans une phrase des *Prolégomènes*, où Kant affirme que dans l'espace les parties ne sont possibles que par rapport au tout.

1. C'est l'opinion de M. Vaihinger (t. II, p. 527).

2. Par exemple, on conçoit fort bien que la relation de principe à conséquence est inverse de celle de conséquence à principe, sans avoir besoin de la « construire » dans le temps ou dans l'espace.

toutes leurs relations internes; leurs parties sont bien égales (et par suite semblables), mais non pas « semblablement disposées » ; en d'autres termes, toutes les relations de grandeur sont les mêmes, mais les relations d'ordre sont inverses.

Pour préciser, voici comment, en fait, on parvient à définir progressivement les figures solides symétriques. On distingue deux sens opposés pour les segments dirigés ou vecteurs d'une même droite, et on leur fait correspondre respectivement les nombres positifs et négatifs. On distingue de même deux sens opposés pour les angles d'un même plan. Deux segments ou deux angles égaux (donc de même sens) peuvent coïncider par un simple glissement; deux segments ou deux angles symétriques (de sens contraire) ne le peuvent pas. Il en est de même pour les triangles *dirigés* (c'est-à-dire doués de sens) situés dans un même plan. La symétrie des trièdres est tout à fait analogue à celle des triangles; seulement la figure a une dimension de plus, de sorte que les trièdres symétriques ne peuvent coïncider par un déplacement dans l'espace à trois dimensions. Plus généralement, on distingue des segments (parallèles), des angles (d'un même plan) et des trièdres *homotaxiques* et *antitaxiques*, suivant qu'ils sont disposés dans le même sens ou en sens contraire (sur la droite, sur le plan, dans l'espace [1]). Or pour transformer un trièdre donné en un trièdre antitaxique, comme pour transformer un angle plan en un angle antitaxique, il suffit de changer le sens d'un de ses côtés, c'est-à-dire de remplacer une demi-droite par son opposée (de

1. Voir dans MÉRAY, *Nouveaux Éléments de Géométrie*, la définition de l'homotaxie et de l'antitaxie des segments (132), des angles (177), des angles dièdres (192), des triangles (217), des trièdres (348), des tétraèdres (370). D'autre part, on appelle *isomères* les figures dont les éléments sont égaux chacun à chacun; et l'on démontre que, pour que deux figures soient égales (superposables), il faut et il suffit qu'elles soient à la fois *isomères* et *homotaxiques* (373). Si elles sont isomères et antitaxiques, elles sont symétriques (418). Cela est également vrai : 1° des segments assujettis à rester sur une même droite; 2° des angles, triangles, polygones... assujettis à rester sur un même plan ; 3° des trièdres, tétraèdres, polyèdres... situés dans le même espace à 3 dimensions. Tous les cas d'antitaxie procèdent de ce fait primordial, qu'il y a deux sens contraires sur une droite, et deux sens contraires de rotation dans un plan.

changer le signe + en signe — sur un des axes). Ainsi l'antitaxie peut se définir par la simple distinction des deux sens d'un segment, et peut se réduire à l'opposition primordiale des segments positifs et négatifs sur une droite. Que cette opposition n'ait rien d'intuitif ni de propre à l'espace, c'est ce que n'aurait pu nier l'auteur de l'*Essai d'introduction du concept des grandeurs négatives dans la philosophie* (1763), puisqu'il prétendait ramener toutes les oppositions *réelles*, même psychologiques (plaisir et douleur) et morales (mérite et démérite) à l'opposition des grandeurs positives et négatives. Si donc le paradoxe de Kant prouve quelque chose, c'est que l'espace est le substratum de relations d'ordre, et que par suite il n'est pas une grandeur pure, mais aussi et surtout *un ordre*, ce qui est au fond la thèse même de Leibniz que Kant croyait réfuter [1].

Cette question doit être soigneusement distinguée de celle-ci, qui paraît lui avoir donné naissance [2] : « Pourquoi le monde réel a-t-il telle orientation plutôt que l'orientation opposée? Pourquoi, par exemple, les planètes tournent-elles de droite à gauche autour du soleil? » A une telle question il n'y a pas de réponse, parce qu'elle n'a pas de sens; et elle n'a pas de sens précisément parce que l'espace n'est pas absolu, et ne comporte pas de différences qualitatives et intuitives. Si l'espace était absolu, il devrait y avoir une *raison* pour que les planètes tournent de droite à gauche plutôt que de gauche à droite; mais s'il n'y a pas de raison à ce fait (et il n'y en a évidemment pas), c'est que l'espace n'est pas absolu [3]. Du reste, les deux sens sont indifférents et indiscernables, car si les planètes tournent de droite à gauche pour un observateur placé dans le

1. On voit ce qu'il faut penser de cette assertion de Kant, que les axiomes de la Géométrie « ne portent proprement que sur des grandeurs comme telles » (B. 204). Cette thèse est d'ailleurs démentie par toute la Géométrie moderne, dont la plupart des axiomes portent au contraire sur l'ordre et la situation. Voir par ex. D. HILBERT, *Grundlagen der Geometrie* (1899).

2. *Correspondance entre Leibniz et Clarke*, qui, selon M. VAIHINGER, aurait exercé une grande influence sur le développement de la pensée de Kant (II, 133, 414, 436, 505, 530).

3. C'est ce que Leibniz soutenait contre Clarke et Newton (III, 5).

soleil la tête au N. et les pieds au S., elles tournent de gauche à droite pour un observateur placé dans la position inverse. Ainsi la distinction des deux sens est relative à la distinction du N. et du S. qui est elle-même relative; car il n'y a ni haut ni bas dans l'univers.

On dira peut-être que, malgré tout, la différence des objets symétriques est quelque chose d'indéfinissable, et que ce qui le prouve, c'est l'impossibilité où nous sommes de la définir autrement que par référence à des cas particuliers, c'est-à-dire à l'intuition : nous sommes obligés en effet de nous servir des termes de droite et de gauche, qui sont relatifs à notre propre corps, que nul ne peut définir, et qui ne peuvent être distingués que par un sentiment immédiat et inanalysable. A cela nous répondrons que cet argument porte, non plus sur la possibilité de distinguer intellectuellement les figures symétriques, mais seulement sur les moyens que nous employons pour les distinguer dans le langage, c'est-à-dire pour les désigner aux autres. Dans l'opuscule : *Was heisst sich im Denken orientiren?* (1786), Kant soutient qu'on ne peut s'orienter, c'est-à-dire distinguer les quatre points cardinaux, qu'au moyen du *sentiment subjectif* de la droite et de la gauche ; et il ajoute : « Je l'appelle un *sentiment*, parce que ces deux côtés ne présentent extérieurement dans l'intuition aucune différence sensible » (Ed. Hart., IV, 341). Il oublie qu'il y a une différence parfaitement sensible et absolument objective entre les deux demi-droites opposées qu'un point détermine et sépare sur une droite indéfinie, attendu qu'elles n'ont pas d'autre point commun. Il y a là une distinction intelligible et bien claire, et non une simple distinction de sentiment. Les dénominations de droite et de gauche ne servent nullement à les distinguer, mais simplement à les désigner verbalement. De même, nous nous servons des indications géographiques ou anthropomorphiques de nord et de sud, de haut et de bas, pour désigner les deux sens inverses d'une droite (d'un axe de coordonnées), ou de l'expression : « sens des aiguilles d'une montre » pour désigner les deux sens possibles d'une rotation sur un cercle;

et pourtant deux droites de sens inverses, deux cercles décrits en sens inverses, peuvent être amenés à coïncider. Ainsi la nécessité pratique où nous sommes de faire appel à des données intuitives pour désigner les figures symétriques n'est nullement liée à leur incongruence, et ne prouve pas que, même dans le cas de l'incongruence, nous ne puissions pas discerner les figures symétriques sans recours à l'intuition.

Les principes de la Géométrie.

Au surplus, la reconstruction logique de la Géométrie n'est pas simplement une possibilité idéale, mais un fait réalisé par les travaux des géomètres contemporains[1]. Il est donc désormais établi que les démonstrations géométriques sont (c'est-à-dire peuvent et doivent être) analytiques, et que la Géométrie peut et doit se déduire tout entière logiquement d'une vingtaine de postulats. Reste à savoir quelles sont l'origine et la valeur des postulats. C'est là une question encore controversée, et que la Logique formelle n'est pas compétente pour résoudre. Ce qui est sûr, c'est que les postulats de la Géométrie ne peuvent pas se déduire, comme les axiomes de l'Arithmétique, des principes de la Logique : et la preuve en est qu'il n'y a qu'une Arithmétique, tandis qu'il y a plusieurs Géométries (*logiquement* possibles). Sans doute, chacune de ces Géométries se construit *analytiquement* sur un ensemble de postulats qui la caractérisent et la déterminent entièrement; chacune d'elles se présente comme un système *hypothético-déductif*, selon l'expression de M. Mario Pieri, c'est-à-dire comme un ensemble de propositions logiquement enchainées qui dépendent de

1. Voir notamment Mario Pieri : *I Principii della Geometria di posizione, composti in sistema logico deduttivo*; *Della Geometria elementare come sistema ipotetico deduttivo*; ap. *Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino*, série II, t. XLVIII et XLIX (1898, 1899); et *Sur la Géométrie envisagée comme un système purement logique*, ap. *Bibliothèque du Congrès de Philosophie*, t. III. Selon cet auteur, la Géométrie est « l'étude d'un certain ordre de relations logiques », complètement affranchie de l'intuition, et revêtant la forme « d'une science idéale purement déductive et abstraite, comme l'Arithmétique ».

quelques hypothèses, et qui seront vraies dans le cas et dans la mesure où ces hypothèses seront elles-mêmes vérifiées. Une fois ces hypothèses admises, la Logique pure règne dans chacune de ces Géométries; au point de vue logique, elles sont équivalentes et indifférentes. Il ne faut pas croire qu'elles soient incompatibles : elles ne le seraient que si elles portaient sur le même objet ou ensemble d'objets (un espace); mais, en elles-mêmes, elles ne portent sur aucun objet et n'en impliquent aucun, puisqu'elles sont purement hypothétiques[1]. Ce sont des systèmes d'implications formelles qui n'affirment pas plus leurs hypothèses que leurs conclusions. Or ces hypothèses, ce sont les postulats; ceux-ci ne font donc pas partie, à proprement parler, des propositions, des *assertions* qui constituent chaque Géométrie : ils sont considérés à titre problématique comme des hypothèses gratuites (nous ne disons pas *arbitraires*, car il n'y a rien d'arbitraire dans les Mathématiques, en dehors des définitions... et encore!). En ce sens, les diverses Géométries font partie des Mathématiques pures, ce sont des sciences déductives et purement analytiques, en tant qu'elles portent sur des espaces idéaux et simplement possibles. Chose curieuse, la Géométrie moderne a exactement réalisé l'idéal que Kant avait prévu et défini à vingt-trois ans, dans son premier ouvrage, alors qu'il était encore tout imprégné de pensées leibniziennes : « Une science de toutes les espèces possibles d'espaces serait sans doute la Géométrie la plus haute qu'un entendement fini pût entreprendre[2]. »

Mais, en un autre sens, la Géométrie cesse d'être une science analytique et une mathématique pure : c'est lorsqu'elle s'applique à un objet particulier, l'espace actuel, et en implique l'existence. A ce point de vue, il n'y a plus qu'une Géométrie admissible, et il faut nécessairement faire un choix entre toutes les Géométries logiquement possibles. D'ailleurs, d'après ce que nous avons dit, faire ce choix se réduit à choisir entre les divers systèmes de postulats qui commandent respectivement

1. Voir la phrase si caractéristique de M. Pasch, citée p. 156, note 1.
2. *Gedanken von der wahren Schätzung der lebendigen Kräfte*, § 10 (1747).

les différentes Géométries, c'est-à-dire à affirmer que tel système est vérifié par l'espace actuel ou par le monde réel : une telle affirmation est évidemment synthétique, au sens que nous avons défini, en ce qu'elle dépasse les bornes de la Logique formelle. A qui appartient-il de faire ce choix, ou qu'est-ce qui le détermine? C'est la seule question qui puisse encore donner lieu à controverse. La plupart des mathématiciens pensent que c'est l'expérience qui nous apprend quels sont les postulats qui sont effectivement vérifiés dans notre monde; les postulats seraient des lois inductives, des résumés d'innombrables expériences, et par suite la Géométrie serait une science inductive et expérimentale, la première, c'est-à-dire la plus abstraite et la plus simple des sciences physiques. Dans cette théorie, les jugements géométriques seraient simplement synthétiques *a posteriori*. Mais, pour d'autres, l'expérience serait impuissante, ou plutôt incompétente, à décider entre les diverses Géométries, attendu qu'une même expérience, un même ensemble de faits, pourrait se couler et s'interpréter dans les divers systèmes que nous offre la Géométrie pure. Notre choix ne serait donc pas imposé par l'expérience, mais guidé par des raisons de « commodité ». Or, comme il s'agit évidemment ici, non pas d'une commodité empirique ou pratique, mais d'une commodité intellectuelle, on peut présumer que ces raisons de « commodité », si on les précisait et analysait davantage, se réduiraient à des raisons... rationnelles, c'est-à-dire des jugements synthétiques *a priori*. Et ce qui semble confirmer cette présomption, c'est le caractère éminemment rationnel des deux propriétés essentielles de l'espace euclidien : 1° la possibilité de déplacer une figure invariable sans la déformer, qui constitue en somme le principe d'identité de la Géométrie (la même figure peut exister en des lieux différents); 2° la possibilité des figures semblables, qui constitue ce que Delbœuf appelait l'indépendance de la forme et de la grandeur (la même forme peut exister à des échelles différentes). Seulement ces jugements synthétiques *a priori* ne seraient pas fondés, comme le pensait Kant, sur une intuition sensible (fût-elle pure),

mais sur des nécessités ou tout au moins des convenances rationnelles, de sorte que cette thèse donnerait raison bien plutôt à l'intellectualisme leibnizien qu'à l' « intuitionisme » kantien.

Néanmoins, à côté de ces postulats d'un caractère intellectuel, il y en a au moins un, celui relatif au nombre des dimensions de notre espace, qui ne paraît pas pouvoir s'expliquer de la même manière, ni avoir aucune raison d'être intelligible. Il semble bien que ce soit là un fait d'intuition inexplicable et irréductible, qui s'impose pratiquement à tous les hommes d'une manière irrésistible, soit qu'il provienne de la constitution subjective de notre sensibilité, soit qu'il traduise plus ou moins symboliquement une propriété objective du monde extérieur. Si donc il y a un postulat qui paraisse justifier la doctrine kantienne, c'est bien celui-là. Entre les deux théories que nous venons de citer, nous n'avons pas la prétention de décider. Mais peut-être la solution la plus probable du problème est-elle intermédiaire et mixte : certains postulats seraient d'origine intellectuelle, et certains autres d'origine intuitive. L'espace serait alors, non plus une simple forme de la sensibilité, mais une forme assez complexe organisée par des principes intellectuels avec des éléments d'ordre intuitif.

Quoi qu'il en soit, tandis que l'Arithmétique dément la théorie kantienne, c'est dans la Géométrie que cette théorie a le plus de chances de subsister. Ce résultat est contraire à l'opinion d'un grand nombre de mathématiciens, qui prétendent que l'invention des géométries non euclidiennes a réfuté la doctrine kantienne; ces auteurs, apparemment peu familiers avec la pensée de Kant, croient que sa doctrine implique qu'il n'y ait qu'une Géométrie *logiquement* possible, ce qui est faux ; l'existence de plusieurs Géométries possibles est bien plutôt un argument en faveur de la thèse kantienne, que les jugements géométriques sont synthétiques et fondés sur l'intuition [1].

1. Cf. A. Riehl, *Helmholtz in seinem Verhältnis zu Kant*, ap. *Zu Kant's Gedächtnis* (*Kantstudien*, 1904).

M. Russell[1] a vu beaucoup plus juste en disant que ce qui a ruiné la philosophie kantienne des mathématiques, ce n'est pas la Géométrie non euclidienne, mais la reconstruction logique de l'Analyse, ce que M. Klein a appelé l'*arithmétisation des mathématiques*[2].

Les antinomies.

Nous ne parlerons pas ici de l'antinomie de la raison pure, non seulement parce que nous l'avons discutée ailleurs et que nous n'avons rien à ajouter ni à changer à cette discussion[3], mais encore parce qu'elle n'a pas d'importance réelle pour notre sujet. Kant croyait que l'antinomie de la raison pure portait sur la nature de l'espace et du temps et confirmait la thèse de l'idéalité de ces deux formes. Mais, en réalité, les prétendues contradictions où la raison s'engagerait inévitablement en spéculant sur le monde proviennent toutes d'une notion inexacte de l'infini et des préjugés traditionnels relatifs à cette notion[4]; elles ont perdu toute espèce de fondement depuis que cette notion a été élucidée et rigoureusement définie. D'ailleurs, s'il est juste de reconnaître que Kant n'a pas été dupe des sophismes les plus grossiers des finitistes, il faut avouer qu'il n'a pas eu de l'infini une notion claire et constante[5]; car, tandis que dans l'*Esthétique transcendentale* il considère l'espace comme « une grandeur infinie *donnée* » (A. 25, B. 39), et donnée dans une intuition simultanée, dans l'*Antinomie* il définit l'infini par le fait que « la synthèse successive de l'unité dans la mesure d'une quantité ne peut jamais

1. *The principles of mathematics*, § 149, p. 158.
2. F. Klein, *Sur l'arithmétisation des mathématiques*, ap. *Göttinger Nachrichten*, 1895; trad. ap. *Nouvelles Annales de mathématiques*, 3e serie, t. XVI (mars 1897).
3. *De l'Infini mathématique*, 2e partie, liv. IV, ch. IV.
4. C'est ce qu'a montré notamment Wundt : *Kant's kosmologische Antinomien und das Problem der Unendlichkeit*, ap. *Philos. Studien*, t. II (1885).
5. Il faut signaler, cependant, qu'une fois au moins il a trouvé la juste définition de l'infini : « L'infini est ce qui n'est pas diminué par la soustraction d'une partie finie ». *Allgemeine Naturgeschichte und Theorie des Himmels* (1755), comm' de la 3e partie (Hartenstein, I, 332). Malheureusement il ne s'y est pas tenu.

être achevée » (A. 430-32, B. 458-60)[1]. On retrouve ici l'immixtion malencontreuse et illégitime de l'idée de temps, soit dans le nombre, soit même dans la grandeur. On peut donc dire que Kant introduit lui-même dans la notion d'infini la contradiction qu'il croit y découvrir, et lui retourner le reproche qu'il adressait avec raison aux finitistes de son temps (et de tous les temps) : « Confingunt nempe talem infiniti definitionem, ex qua contradictionem aliquam exsculpere possint[2] ». Dans tous les cas, les antinomies procèdent, non des notions propres de l'espace et du temps, mais uniquement de la notion de l'infini qu'on leur applique; on ne peut donc rien en conclure touchant l'idéalité de l'espace et du temps. On ne peut en conclure, selon nous, qu'une chose : c'est que Kant s'est fait un concept contradictoire de l'infini, parce qu'il introduit arbitrairement la notion de temps dans le nombre et dans la grandeur; c'est par conséquent une réfutation indirecte de sa philosophie des mathématiques[3].

1. Cf. Vaihinger, *Commentar*, t. II, p. 253-261 : *Excurs* sur « l'espace grandeur infinie donnée ». Cette contradiction est fort voisine de cette autre, remarquée par P. Schröder (*Kants Lehre vom Raum*, Halle, 1894) : dans l'Esthétique transcendentale (§ 2, n° 3), Kant dit que l'espace est antérieur à ses parties; mais ailleurs (A. 162, B. 203) il dit que la grandeur extensive est celle dont les parties sont antérieures au tout, et que l'espace est une telle grandeur.

2. *De mundi sensibilis atque intelligibilis forma et principiis* (1770), éd. Hartenstein, t. II, p. 396 note; cf. A. 430, B. 458. Le contexte de cette note confirme complètement notre interprétation, à savoir qué la seule raison des antinomies est le caractère *successif* attribué à la synthèse des nombres et des grandeurs, laquelle par suite ne peut être achevée « en un temps fini ». Kant ajoute que c'est là une nécessité « subjective » de l'entendement « humain », qui n'entraîne nullement que l'infini soit inintelligible en soi (c'est-à-dire contradictoire). Le concept d'infini, dit-il encore, est irreprésentable, en tant que contraire aux lois de l'intuition, mais non impossible, c'est-à-dire contraire aux lois de la pensée. Toute difficulté disparaît donc, si l'on admet, contrairement au postulat fondamental de la *Critique*, que la pensée n'est pas nécessairement confinée dans le domaine de l'intuition.

3. Bien des auteurs ont déjà observé que les antinomies ne prouvent pas l'idéalité du monde extérieur, car ces prétendues contradictions restent les mêmes, que le monde soit idéal ou réel (Voir par exemple Wundt, *op. cit.*). Erhardt a fait à ce sujet une remarque ingénieuse et d'une logique fort juste : Si le fondement des antinomies était réellement l'hypothèse de la réalité du monde, cette hypothèse devrait figurer dans la démonstration des thèses et des antithèses, ce qui n'a pas lieu (*Kritik der kantischen Antinomienlehre*, Jena, 1888).

Conclusions.

En résumé, les progrès de la Logique et de la Mathématique au XIX[e] siècle ont infirmé la théorie kantienne et donné raison à Leibniz. Si Kant séparait et opposait entre elles la Logique et la Mathématique, c'est qu'il avait une idée trop étroite de l'une et de l'autre. On connaît l'opinion qu'il avait de la Logique : cette science n'avait pas, selon lui, fait un seul pas depuis Aristote (B. VIII), et n'en avait plus un seul à faire, car elle avait atteint dès l'origine une perfection qu'elle devait à sa « limitation ». On sait aussi quel éclatant démenti les logiciens modernes devaient infliger à cette opinion. Sans doute, Kant ne pouvait pas prévoir la renaissance de la Logique au XIX[e] siècle; mais il aurait pu du moins être plus juste pour les efforts de ses prédécesseurs, c'est-à-dire de Leibniz et de son école, qui avaient essayé de dépasser le cadre artificiel et restreint de la Logique aristotélicienne. Au lieu de continuer ce mouvement et de collaborer à ce progrès avec ses puissantes facultés, Kant s'est montré en Logique formelle ultra-conservateur, pour ne pas dire réactionnaire : il s'est contenté de critiquer la « fausse subtilité des quatre figures du syllogisme » et de simplifier la Logique scolastique, et il ne paraît pas s'être jamais douté que celle-ci eût besoin d'être élargie et approfondie[1]. Cela est d'autant plus étonnant, que la Logique formelle était, de son propre aveu, la base nécessaire de la Logique transcendentale : c'est « la même fonction » qui forme les jugements et subsume les objets sous les catégories; c'est « le même entendement », « par les mêmes actions », qui produit, d'une part, l'unité analytique dans les concepts, et d'autre part l'unité synthétique dans l'intuition (A. 79; B. 104-105)[2]. Il semble donc que Kant eût dû, avant toute chose, analyser avec le plus grand

1. Cf. Steckelmacher : *Die formale Logik Kant's in ihren Beziehungen zur transscendentalen* (Breslau, 1879).

2. Dans le § 26 de la *Critique*, Kant affirme « la coïncidence complète des catégories avec les fonctions logiques générales de la pensée » (B. 159). Cf. W. Schuppe : *Das Verhältniss zwischen Kant's formaler und transscendentaler Logik*, ap. *Philos. Monatshefte*, t. XVI (1880).

soin les opérations logiques de l'esprit et les divers modes de déduction, suivant la méthode positive préconisée et pratiquée par Leibniz, à savoir par l'étude des formes du langage et de la pensée scientifique. Au lieu de cela, il s'est contenté d'emprunter à la vieille Logique scolastique des formules surannées et un cadre tout fait, et d'adopter la classification traditionnelle des jugements [1], en la complétant par de fausses fenêtres pour les besoins de la symétrie [2]. Et quand on sait quel usage, ou plutôt quel abus il a fait de ce cadre étroit et rigide, quand on le voit calquer sur lui le tableau des catégories et celui des principes, puis couler tour à tour toutes ses théories dans ce moule uniforme et le transformer en un lit de Procuste où elles doivent entrer bon gré mal gré, bien plus, s'en servir comme d'un guide et d'un moyen d'invention, on reste confondu à la pensée que le grand critique a accepté *sans critique* le fondement de tout son système, qu'à l'édifice majestueux (mais trop artificiel et trop symétrique) des trois *Critiques* il manque le soubassement indispensable, à savoir une Logique moderne et vraiment scientifique, et qu'en un mot, le colosse d'airain a des pieds d'argile.

D'autre part, Kant concevait, avec tous ses contemporains, les mathématiques comme les sciences du nombre et de la grandeur, et même, plus étroitement encore, comme les sciences de l'espace et du temps, et non pas comme une science ou plutôt une méthode purement *formelle*, comme un ensemble de raisonnements déductifs et hypothétiquement nécessaires. Ici encore, on ne saurait lui reprocher de n'avoir pas prévu l'avenir, encore que, sur ce point aussi, Leibniz ait vu plus clair et plus loin que lui, et ait conçu fort nettement la Mathématique universelle, et plus spécialement l'Algèbre universelle (qu'il appelait la Caractéristique) comme applicable à toutes

1. Empruntée à l'*Organon* de Lambert (Steckelmacher, *op. cit.*).
2. F. Erhardt (*Kritik der Kantischen Antinomienlehre*, Jena, 1888) remarque et blâme ce goût de Kant pour l'*architectonique*, et lui attribue l'invention des antinomies de la raison pratique et de la faculté de juger, qui lui paraissent des pendants artificiels à l'antinomie de la raison pure.

les formes possibles de déduction. Mais ces anticipations géniales étaient encore inconnues ou méconnues, et passaient alors pour des rêves d'utopiste. Au temps de Kant, les principes de l'Analyse étaient encore obscurs, le Calcul infinitésimal n'avait pas encore été logiquement construit et purgé de la notion mystérieuse d'infiniment petit (que certains Kantiens ont si étrangement interprétée); Gauss ne savait pas encore si l'on devait admettre les « quantités » imaginaires, qui sont devenues la base indispensable de l'Analyse, et c'est en 1806 seulement qu'Argand en trouvait la première interprétation satisfaisante. Pendant longtemps encore, on s'est demandé si ces entités bizarres et paradoxales (contradictoires même pour quelques-uns) étaient des « nombres » ou des « grandeurs ». Ce n'est que peu à peu, à la suite de l'invention du calcul barycentrique de Möbius, du calcul des équipollences de Bellavitis, du calcul géométrique de Grassmann, des quaternions de Hamilton, de la Géométrie projective de Staudt, de la théorie des ensembles, de la théorie des substitutions et des groupes, enfin du calcul logique de Boole, qu'on est parvenu à concevoir que la mathématique n'est pas liée à une nature particulière d'objets, mais est une méthode générale de démonstration et d'invention. C'est précisément Boole qui a le premier « réalisé » cette idée, et l'a formulée dans cette phrase lapidaire : « Il n'est pas de l'essence des mathématiques de s'occuper des idées de nombre et de quantité[1]. » Aussi l'on a pu dire, sans trop de paradoxe, que la mathématique pure a été découverte par Boole[2]. Et puisque nous célébrons des anniversaires, il nous sera permis de remarquer que le centenaire de la mort de Kant est le cinquantenaire de la mathématique pure; ce qui excuse suffisamment Kant de n'avoir pas connu celle-ci.

En somme, toutes nos critiques reviennent simplement à constater ce fait notoire, que depuis un siècle la Mathématique

1. *Laws of Thought*, Préface, p. 12 (1854).
2. B. Russell, *Recent work on the principles of mathematics*, ap. *The International Monthly*, juillet 1901 (p. 83).

a fait des progrès immenses et imprévus, non seulement dans le sens de l'extension et des applications, mais dans le sens des principes et de leur approfondissement, et que ces progrès constituent nécessairement un gain pour la philosophie; de sorte que s'en tenir, sur les mathématiques, aux théories et aux formules de Kant serait tout bonnement retarder d'un siècle. Nous laissons à ses disciples le soin de rechercher ce qui peut subsister de sa théorie de la connaissance, dont sa philosophie des mathématiques paraît bien être une pièce essentielle [1]. On lui a même reproché d'avoir fait reposer sa théorie de la connaissance trop exclusivement sur la considération des mathématiques, d'avoir pris celles-ci pour type unique de la science rationnelle et d'avoir ainsi donné à sa Critique une base trop étroite. Ce reproche nous paraît justifié, mais en un autre sens que ne l'entendent ses auteurs. Si la base de la Critique est trop étroite, ce n'est pas parce qu'elle est empruntée aux mathématiques, mais parce qu'elle est empruntée à une conception insuffisante et périmée des mathématiques. Il est vain d'espérer qu'on pourra tirer de l'étude des sciences de la nature des lumières nouvelles sur la constitution de l'esprit; car c'est méconnaître le caractère formel de la mathématique et son applicabilité universelle : elle est la véritable Logique des sciences de la nature, et il n'y a pas de Logique possible en dehors d'elle. Sans doute, elle devra toujours s'étendre davantage, s'assouplir et se compliquer pour se prêter à l'élaboration rationnelle de théories nouvelles; mais toute science doit nécessairement revêtir la forme mathématique, dans la mesure même où elle devient exacte, rationnelle et déductive [2]. La science est une, comme l'esprit; et de même qu'il n'y a pas de

1. Selon Zimmermann (*op. cit.*), « le préjugé mathématique de Kant » (à savoir cette thèse que les jugements mathématiques sont synthétiques) « est la racine de la Critique ». Cf. la phrase du même auteur que nous avons prise pour épigraphe; et Kuno Fischer, III, 284 : « der Punkt wo die kritische Philosophie einsetzt, ist die richtige Einsicht in die wissenschaftliche Natur der Mathematik ».

2. Comme Kant le dit lui-même dans les *Principes métaphysiques de la Science de la Nature*, Préface.

compartiments et de cloisons étanches dans l'esprit, il n'y a pas entre les sciences d'hiatus ou de sauts qui bornent la juridiction d'une Logique et justifient l'introduction d'*une autre* Logique. Il n'y a qu'une Logique, la Logique de la déduction, dont les méthodes dites inductives ne sont qu'une application, parce qu'il n'y a qu'une seule manière d'enchaîner les vérités d'une manière formelle et nécessaire [1]. Seulement cette Logique n'est plus la pauvre, mesquine et stérile Logique scolastique; elle est coextensive aux Mathématiques, et susceptible, comme elles, d'un développement indéfini.

Loin donc de reprocher à Kant d'avoir été trop mathématicien et trop logicien, nous lui reprocherions au contraire de ne pas l'avoir été assez, en un mot, de n'avoir pas été assez rationaliste. En général, il est imprudent et téméraire de prétendre limiter le domaine et la compétence de la pensée, et de lui dire : « Tu n'iras pas plus loin. » Tous les philosophes qui ont essayé ainsi de tracer des frontières à la science ou des démarcations entre les sciences ont été tôt ou tard réfutés par les progrès incessants de nos connaissances. C'est en ce sens que la maxime tant discutée de Leibniz est profondément juste : les systèmes sont vrais par ce qu'ils affirment, et faux par ce qu'ils nient. Kant a trop cherché à distinguer et à délimiter les facultés de l'esprit, à les parquer dans des cases bien étiquetées; son système, d'une symétrie artificielle et voulue, donne l'impression étouffante d'une construction finie et close de toutes parts : il ressemble au système du monde des anciens, avec ses cieux de cristal superposés; il ne laisse pas de place à l'extension irrésistible des sciences, c'est-à-dire à l'avenir et au progrès. Enfin Kant a manqué de confiance dans le pouvoir et la fécondité de l'esprit humain. Il a été trop préoccupé de circonscrire minutieusement le champ de la pensée, de subordonner la raison spéculative à la raison pratique, de borner et même de « supprimer le *savoir* pour faire place à la *foi* » (B. xxx). Mais la raison a pris sa revanche, en brisant les

1. Cf. *La Logique de Leibniz*, p. 271.

cadres rigides et les formules scolastiques où il avait cru l'enfermer pour toujours[1].

P.-S. — Au moment de mettre sous presse, nous prenons connaissance du mémoire de M. HUNTINGTON : *The continuum as a type of order; an exposition of the modern theory. With an appendix on the transfinite numbers*, publié dans les *Annals of Mathematics*, 2e s., t. VI, n° 4, et t. VII, n° 1 (juillet-octobre 1905). C'est un exposé très élémentaire, très clair et tout à fait didactique (illustré de nombreux exemples) de la théorie des ensembles ordonnés, et de la définition du continu par des propriétés purement ordinales. On y trouve aussi des notions sommaires touchant les suites normales (ensembles bien ordonnés) et les nombres infinis ordinaux et cardinaux.

1. Nous nous sommes abstenu à dessein de répéter ici les considérations d'ordre historique que nous avons indiquées dans notre exposé : *Kant et la Mathématique moderne*, ap. *Bulletin de la Société française de Philosophie*, séance du 20 mars 1904. — Depuis que ce mémoire a été publié, nous avons trouvé des conclusions tout à fait semblables chez M. Josiah ROYCE, *Kant's doctrine of the basis of mathematics*, ap. *Journal of Philosophy, Psychology and scientific methods*, t. II, n° 8 (avril 1905), et chez M. Maxime BÔCHER, *The fundamental conceptions and methods of mathematics*, ap. *Bulletin of the American Mathematical Society*, t. XI, n° 3 décembre 1904).

INDEX DES NOMS PROPRES

TABLE DES MATIÈRES

1080-05. — Coulommiers. Imp. Paul BRODARD. — 12-05.

